

Q. 基礎問題精講Ⅲp209の注にある積分の積分区間の変更、積分が分かりません。
計算過程の解説をお願い致します。

A. $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ と置換した時、 $x: 0 \rightarrow 1$ なので、 $\frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta: \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$ なので $\tan \theta: \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{3}$
よって、 $\theta: \pi/6 \rightarrow \pi/3$ と積分区間を変更することができる。

また、 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ から $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \times d\theta / (\cos \theta)^2$ となる。(この解答での表記法について、 x^2 とは x の2乗を意味します)

よって、

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4/3}{((\tan \theta)^2 + 1)} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d\theta}{(\cos \theta)^2} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4/3 \times \sqrt{3}}{2} d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$