質問内容

$S-rS$ とおいて計算するのは理解できるが、立式してからの計算が解答を見ても理解できないので、もう少し詳しく教えてほしい。

回答

(1)の計算の過程を詳しく解説致します。

まず、

$$
\begin{aligned}
S &= 1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots\qquad\qquad\qquad\qquad +(2n-1)\cdot 2^n\\
2S &= \qquad\qquad 1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

ですので、両辺をそれぞれ引くと

$$
\begin{aligned}
S-2S &= 1\cdot 2^1+(3-1)\cdot 2^2+(5-3)\cdot 2^3+\cdots+\{(2n-1)-(2n-3)\}\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^{n+1}\\
&= 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+2\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^{n+1}\\
&= 2^1+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

となります。ここで、上式の最後の項以外は、等比数列に近い形になっていますが、

$2^2(=4)$が足りないので、足して、後で引いておくことにすると

$S-2S=2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-4-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

よって、上式の最後の二項以外は初項2、公比2、項数$n+1$の等比数列となるので、等比数列の和の公式より

$$
\begin{aligned}
S-2S &= \frac{2(2^{n+1}-1)}{2-1}-4-(2n-1)\cdot 2^{n+1}\\
&= 2(2^{n+1}-1)-4-(2n-1)\cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

あとは両辺を計算して、整理して完成となります。

$$
\begin{aligned}
-S &= 2\cdot 2^{n+1}-2-4-(2n-1)\cdot 2^{n+1}\\
&= -(2n-3)\cdot 2^{n+1}-6
\end{aligned}
$$

$\therefore S=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$

これが答えとなります。

(2)については2^2Tを引く点に注意する必要はありますが、その他の点に関して(1)とほぼ同様の流れで答えが出せるはずですので、まずは自分で解いてみてください。分からないようでしたら再度質問頂ければと思います。