Q.（基礎問題精講 1A　例題 127　）
解説の補助をお願いします。

A.　最終的に求めたいのは（２）のp_nを最大にするｎで、（１）はその準備としてp_nを求める流れになっています。

(1)
まず、p_nは白と赤を含めた n+5 個の中から２個取り出すときにそれが白、赤一個ずつである確率なので、組み合わせ記号 C を用いて

$$p_n = \frac{5C_1 \cdot nC_1}{n+5C_2} = \frac{5\text{ 個の白玉から１つ・n 個の赤玉から１つ}}{\text{n + 5 個の玉から２つ}}$$　となります。

よって　$p_n = \dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$

(2)
次にp_nを最大にするｎを求めていくのですが、p_nを変数ｎについての関数と見れば、いつも関数の最大値を求めるような方法でp_nをｎで微分して増減表を書く、、、という流れで求めることもできなくはありません。

ですが、この問題では　$\frac{p_{n+1}}{p_n}$を求めて、この<u>隣接する項どうしの比を１と比較</u>することで求めていきます。なぜ微分などではなくてこの方法で解くかというと
①ｎはすべての実数をとるわけではなく、自然数というとびとびの値をとること
②p_nは確率なので正の値になること
③p_nはｎの分数関数になるので、微分などして扱うのが面倒そうであること
④p_nは確率なので積の形で表わされていることが多く、隣接項を比べる際も$p_{n+1} - p_n$のように差をとるよりも割った方が式が扱いやすい
などが挙げられます。
確率の最大値、最小値の問題でこの隣接項の比をとるという方法はよく用いられるので、このパターンは覚えましょう。

では、解き方について説明していきます。

$\frac{p_{n+1}}{p_n}$を１と比較したとき、

(a)$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$のとき、$p_n < p_{n+1}$なのでｎが大きくなるほど確率p_nも大きくなるといえます。

(b)$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$のとき、$p_n > p_{n+1}$なので n が大きくなるほど確率p_nは小さくなります。

最大値を求める場合、(a)となるような n のうち最も大きいものが最大値を与える n になります。

$$p_1 < p_2 < \ \dots < p_{n-1} < p_n > p_{n+1} > p_{n+2} > \cdots$$

n:増加→→→増加終わり【**最大**】減少始まり→→→減少

という考え方になります。

また、このような n の見つけ方ですが、$\frac{p_{n+1}}{p_n}$を 1 と比較できることが大切なので

まず割り算の商が 1 になるように変形して、余りを求めるような形に変形してみると分かりやすいと思います。

今回の問題では$p_n = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$より、n のところに n+1 を代入して

$$p_{n+1} = \frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+6)} = \frac{n(n+6) + (n+1)(n+4) - n(n+6)}{n(n+6)} = 1 + \frac{-n+4}{n(n+6)}$$

よって、$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{4-\mathrm{n}}{n(n+6)}$

この$\frac{4-\mathrm{n}}{n(n+6)}$が、正なら(a)$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1$、負なら(b)$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$となります。

分母は n(n+6)で常に正なので、正負の境目は 4 になることが分かります。

ただし、注意しなければならないのは$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$となることもあるので、境目を見つけたらその前後一つずつの自然数までは代入して調べて、

$p_1 < p_2 < \ p_3 < p_4 = p_5 > p_6 > p_7 > \cdots$といった式までは書いておくようにしましょう。