

Q. (数 IA 標準問題精講 P131 演習問題 55(2))

解説の補助をお願いします。

A. (1) を利用して (2) を解いていくことを考えます。

示したい式は $AC \cdot BD = ac + bd$ です。右辺は θ が一切でてこず、 $abcd$ だけで書き表されています。いずれは θ を消去しなければいけないことから (1) の結果を使って消去できないかを考えてみると、

アの答えに cd をかけて、イの答えに ab をかけたものを足せば、 θ は無事に消えてくれます。すると残った式は

$$(ab+cd)x^2=(ad+bc)(ac+bd) \quad \dots \textcircled{1}$$

となります。

これだけではまだ示したい式とは離れていますが、示したい式の右辺 $ac+bd$ が含まれているので、近づいてきたようです。

しかしまだ、示したい式の左辺の BD の要素がどこにもありません。

そこで (1) で求めたのと全く同様にして、 BD を y 、 $\angle BCD = \theta'$ のようにおいて y についての条件を求めてみましょう。

このとき一から計算しなおすのではなく、(1) では a だったものが今度は c 、 c だったものが今度は a というように、アルファベットを入れ替えて考えると

$$(ac+ad)y^2=(cd+ab)(ac+bd) \quad \dots \textcircled{2}$$

という式が立ちます。

あとは①②二つの式を掛ければ $xy=ac+bd$ を示すことができます。