Q．（基礎問題精講 2B P181　例題 119）
解説の補助をお願いします。

A. 数列の和を求めるときには、まず一般項(第n項)を、nを用いて表し、Σ の公式を適用して和を求めるのが基本的な解法です。
ところが本問のように**分母が変わるような数列について和を求めるには、部分分数分解をしてあげること**が定石です。どのようになるか、解説を見て確認してください。
まずは一般項を求めます。各項の分数に注目すると、**分母の左側の数字が項の順番と同**

$$\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{3\cdot 4},\quad \frac{1}{4\cdot 5},\quad \cdots$$

1　2　3　4

じです(例えば第 1 項の分母の左側の数字は 1)。

$$\frac{1}{1\cdot(1+1)},\quad \frac{1}{2\cdot(2+1)},\quad \frac{1}{3\cdot(3+1)},\quad \frac{1}{4\cdot(4+1)},\quad \cdots$$

1　2　3　4

また**分母の右側の数字は左側の数字よりも 1 だけ大きい**です。このことから、第n項を、nを使って表すと

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

となります。これで一般項が求められました。

次にこの数列の和を求めます。

$\frac{1}{n(n+1)}$を部分分数分解すると、

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

この状態で数列の和を求めます。つまり、Σ を使って

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

です。これを第 1 項から書き出してみると、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

隣同士が打ち消し合っていくので、初項の左側と、第n項の右側だけが残ります。結局

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

となります。

本問のように、そのままの形ではΣの公式を利用できないときには、

$\boldsymbol{f(k)-f(k+1)}$**の形に変形**してΣをつけると、**上のようにドミノ倒しのように消えて計算が楽になります。**

この例題では部分分数分解により$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$に変形したことで、$\frac{1}{k}=f(k)$とおくと

$f(n)-f(n+1)$の形になっていることが分かります。

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k+1)\}$$

$$=\{f(1)-f(2)\}+\{f(2)-f(3)\}+\{f(3)-f(4)\}+\{f(4)-f(5)\}+\cdots$$

$$+\{f(n-1)-f(n)\}+\{f(n)-f(n+1)\}$$

$$=\boldsymbol{f(1)-f(n+1)}$$