

Q. (基礎問題精講 2B 演習 61 (p101))

解答で、なぜ $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = t$ と置くのかがわかりません。

例題の流れであれば確かにこの置換は類推できますが、一般式として

$$y = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + \beta \sin 2\theta + \alpha \cos 2\theta \quad \text{とすると}$$

$$t = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \quad \text{と置いても}$$

$$t^2 = \{\alpha^2 + \beta^2\}/2 + \{(\beta^2 - \alpha^2) \cos 2\theta\}/2 + \alpha \beta \sin 2\theta$$

となり、 y を t の関数にしにくいです。

なので、 $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = t$ と置くのが自然に見えないです。

このように置くヒントは誘導以外で何かあるのでしょうか？

A. 見つけ方としては式を整理して、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の項の共通因数でくくると見えてきやすいと思います。

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta \\ &= 2(\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta) + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

ポイントにもあるように、 $a \sin \theta + b \cos \theta$ を t とおくことで、 t^2 を求めた時に $\sin \theta \cos \theta$ の項が $\sin 2\theta$ 、 $\sin^2 \theta$ 、 $\cos^2 \theta$ の項が $\cos 2\theta$ で表わされ、すべての三角関数を二倍角 2θ で統一することができます。

θ と 2θ が混在している関数では最大値最小値を求めるのが難しく、この二つの角度を二倍角の公式を利用して統一することで、これまで観てきた三角関数 $f(2\theta)$ として扱うことができます。そのために θ を含む関数を t とまとめておくことで三角関数の性質を応用することができます。