Q．（数ⅡＢ標準問題精講　標問 5:研究）
証明について、解説の補助をお願いします。

Ａ．
【研究】の「⇒の証明」とは「二つの整式 f(x),g(x)が恒等的に等しいならば、それぞれの係数はすべて等しい」ということを証明するものです。

二つの整式 f(x),g(x)が恒等的に等しいということを f(x)－g(x)=0 として利用していきます。
すると同じ x^k の係数同士（a^k と b^k）が対応するので、x^k でくくるために
まとめて a^k-b^k =c^k としておきます。

f(x)－g(x)=h(x)とすると、f(x),g(x)が恒等的に等しいことから任意の x について h(x)=0 ということになります。これは、x に何を入れても良いということなので、言い換えると方程式 h(x)=0 の解はすべての実数となります。
※なお、このあと因数定理を使う際に方程式 h(x)=0 が n 次式であるという保証が必要なので、ここで一番高い次数のx^nの係数である$c_n \neq 0$としておきます。

ここで、下線部より、異なる n 個の値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,,, \alpha_n$ を用意しても、**このすべては方程式 h(x)=0 の解であるとい**えます。そのため、因数定理により
$h(x) = c_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)・・・(x - \alpha_n)$ と式変形できます。
一番高い次数のx^nの係数だからc_n
また、これは**すべての実数を解にもつ**元の方程式 h(x)=0 を変形しただけのものなので、先ほどと同様に$x = \alpha_{n+1}$を代入しても成り立ちます。ただし、このα_{n+1}は先ほど用意した異なる n 個の値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,,, \alpha_n$ とは異なる値とします。$\alpha_{n+1} \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,,, \alpha_n$ （＊）

$h(\alpha_{n+1}) = c_n(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2)・・・(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$=0
（＊）より$h(\alpha_{n+1})$の因数である$(\alpha_{n+1} - \alpha_1)$、$(\alpha_{n+1} - \alpha_2)$、・・・$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$はいずれも 0 ではありません。にも拘わらず全体として$h(\alpha_{n+1}) = 0$ということは残りの因数であるc_nが 0 である必要があり、$c_n = 0$ *となります。*ただし、これは先ほどの$c_n \neq 0$と反します。これにより$c_n \neq 0$とすると
h(x)=0 が成り立たない⇔「f(x)、g(x)が恒等的に等しい」という仮定が崩れる
ので、$c_n = 0$であることが確認されます。

よって h(x)=0・$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} +$ ・・・$+ c_2x^2 + c_1x + c_0$
$= c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} +$ ・・・$+ c_2x^2 + c_1x + c_0$

再び先ほどと同じ手順で式変形していくと、今度はc_{n-1}が先頭の因数として出てくるので同様の手順で$c_{n-1} = 0$が示されます。これを繰り返していくと、同様にして$c_{n-2},,,c_1,c_0$もすべて 0 であることが示されます。

よって、二つの整式 f(x),g(x)が恒等的に等しいと仮定したとき、それぞれ同じ次数につく係数は等しくなるということが証明されました。

この証明が自力で書ける必要は恐らくないと思いますが、途中の式変形を説明したり、因数定理を利用していることを思い出せる程度にしておくとよいと思います。