

質問内容

三角方程式の単位円の考え方が、いまいちよくわからない。単位円を描いて、解答にたどり着くまでの過程を詳しく教えてほしい。

回答

問題文より、 $\cos 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ……② , $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta < \pi$ となっています。

まず、②で使用されている角度の定義域を求めます。

$0 \leq \beta < \pi$ より、全てに2をかけると

$$0 \leq 2\beta < 2\pi \text{ ……③}$$

また、 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ より、全てに-1をかけると

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha \leq 0$$

さらに、全てに $\frac{\pi}{2}$ を足すと

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ ……④}$$

となります。よって、 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ は第一象限の角であることが分かります。

あとは③④の定義域をみたす②の解を求めれば良いということになります。

②では $\cos$ の値が等しいので、単位円上の角度 2β の点と角度 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ の点は x 座標が等しくなります。

③より、 2β は第一象限または第四象限にあるので、第一象限にあるときには

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

となり、第四象限にあるときには

$$2\beta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{2}\pi + \alpha$$

となります。

これらの二式を β について解くと

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$$

となり、これが答えとなります。