

Q.(標準問題精講 2B 例題 13)

絶対値の場合分けについて、解説の補助をお願いします。

A.

絶対値を外す際の場合分けについて説明していきます。

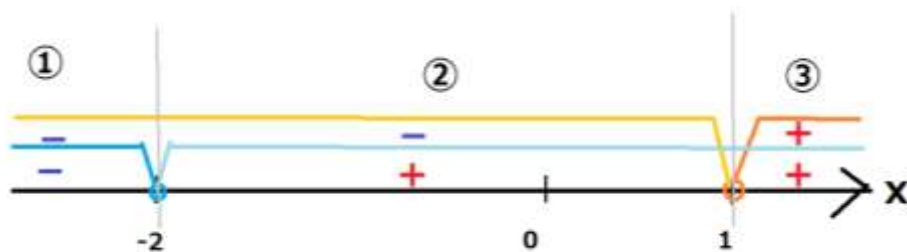
基本的には絶対値の中身が正ならばそのまま、中身が負ならばマイナスをつけて外します。

つまり、絶対値の中身が正の場合と負の場合で場合分けをして適切に絶対値を外す必要があります。

(1)

解答にあるように、まずは二つの $\sqrt{\quad}$ の中身をそれぞれ独立に外します。

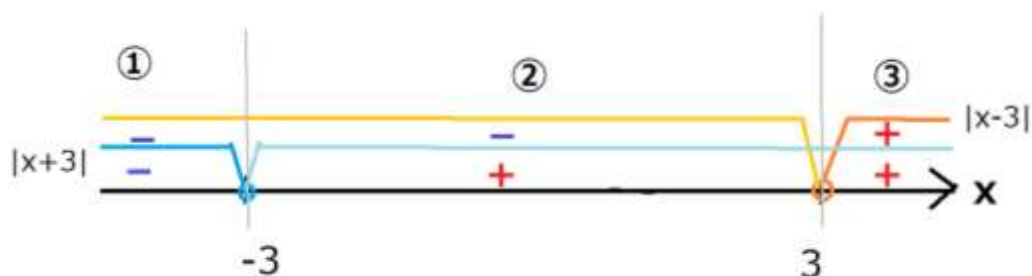
独立な条件を一つの数直線上に表すとそれらを組み合わせた最終的な条件が考えやすくなります。



よって、上記のように①~③の3つに場合分けされます。

(2)

(1)と同様に考えます。二つの絶対値を独立に外したうえで、それぞれの条件を同一数直線上で統合させることがポイントです。



(3)

この問題は、絶対値の外し方というより論理や条件を読み取って処理していくのが難しいと思います。

Pの条件を満たすすべてのxについてQの条件を満たすような範囲を求めるので、「PならばQ」という構造である必要があります。そのため、Qの範囲の中にPの範囲のすべてがすっぽり収まっているようにaを決めていきます。(P⊂Q)

Pの条件、 $\{x \mid ax \geq 0 \text{ かつ } 0 \leq |x| \leq |a|\}$ において、絶対値を外す際、aの正負がポイントになるので、aについて場合分けします。

(i) aが0のとき→P、Qの条件にa=0を代入する

x=0ならばx≠1を満たしているので適する。

(ii) aが正のとき

aが正と仮定して絶対値を外します。Qの範囲が二つの部分に分かれますがどちらか一方にPの範囲が完全に収まるようにしなければなりません。1+a>0より、Qの右側の範囲の始点(1+a)よりもPの範囲の始点(0)は必ず小さくなるため、Qの右側の範囲でPのすべての範囲をカバーすることはできません。そのため、Qの左側の範囲にPがおさまるようにaの条件を絞っていきます。Qの左側の範囲の最大値>Pの範囲の最大値であればよいので、1-a>aです。これと、(ii)

の前提であるa>0を合わせて、 $0 < a < \frac{1}{2}$ となります。

(iii) aが負のとき

(ii)と同じ手順でaの条件を絞ります。 $-1 < a < 0$

(i) (ii) (iii)すべてを合わせて、答えは $-1 < a < \frac{1}{2}$ となります。

xを含む絶対値や√を外す際、xの値によって場合分けすることが多いですが、x以外がすべて実数ではなくaなどの文字を含んでいる場合、xの場合分けをするために必要なこのaについて場合分けをする必要が出てきます。機械的に「xについて場合分け」と覚えるのではなく、数直線で表すなどしてイメージをつけられるようにしましょう。絶対値は基本的な範囲ではありますが、他の分野の問題で式の処理の途中で登場したり、センター試験に頻出なテーマでもあります。いろいろなパターンの問題に触れて、正確に処理できるよう練習しておきましょう。