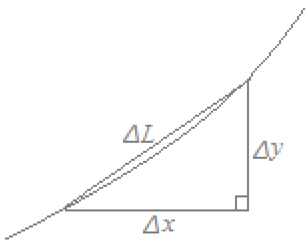
Q．（標準問題精講３p263 研究）
曲線Ｃの長さについての式が何故そうなるのかよく分かりません。

A．
※公式の証明ですが、以下をすべて理解する必要は恐らくありません。公式が使えるようになればよいので、分からないところは読み飛ばして最後の★のところを理解してください。

まず極座標の曲線の長さについて説明する前に、直交座標上で曲線の長さの公式の証明について説明します。



三平方の定理により，横の長さが Δx，縦の長さが Δy である直角三角形の斜辺の長さ ΔL は

$\Delta L=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ となります。曲線の長さを、この⊿Ｌの積み重ねとして求めていきます。
したがって

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

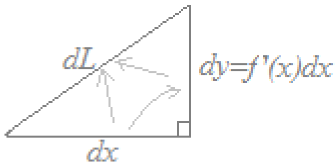
○x ，y 直交座標では $x=t$ とおくと公式の形が得られます。

$\frac{dx}{dt}\to\frac{dx}{dx}=1,\frac{dy}{dt}\to\frac{dy}{dx},td\to dx$ により

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

図で言えば$dL^2=(dx)^2+(y'dx)^2$だから

$$dL=\sqrt{1+(y')^2}dx$$



$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$$

次に、これを極座標に置き換えていきます。

○極座標で $r=f(\theta)$のとき，媒介変数を θ に選べば

$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$

$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$

となるから

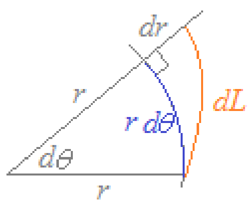
$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta+f(\theta)(-\sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=f'(\theta)^2\cos^2\theta-2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta+f(\theta)^2\sin^2\theta$$
$$+f'(\theta)^2\sin^2\theta+2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta+f(\theta)^2\cos^2\theta$$
$$=f'(\theta)^2+f(\theta)^2=r^2+f'(\theta)^2$$

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

極座標で r が一定ならば，弧の長さは $dL=rd\theta$ で求められるが，一般には r も変化する．



そこで, $dL=\sqrt{(rd\theta)^2+(dr)^2}$

$=\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\cdot d\theta$ の形になる

★★★

【研究】では、x=f(θ)cosθ,y=f(θ)sinθであることから、上の公式でのｒが f(θ)に変わったと考えればわかります。

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta$ です。

とりあえず直交座標、極座標での公式の形を覚えて、それぞれで代入して使えるようにしておきましょう。