Q.(標準問題精講 3 p160 標問 68(2))
解説の補助をお願いします。

A. 今回のような極限の問題では、最初に極限の値に関して予想をすることが大切です。
例えば今回の問題であれば、精講のところに書かれているようにまず図を描くことによって an が 0 に飛ぶのではないかと予想を立てることができます。

さらに、これはちょっとした解き方のコツなのですが、今回の問題のように an の極限を求めさせた後に、nan の極限を求めさせる問題においては an の極限はほぼ間違いなく0に行きます。
なぜかというと、an が5のように 0 以外の値にとぶ場合 nan の極限は絶対に∞だとすぐにわかってしまうからです。よって、nan が∞ではない値にとぶためには an→0 である必要があります。

以上のことから an→0を証明することがわかりました。次にその証明法ですが、まずははさみうちの原理を考えるようにしましょう。両側ではさむ二つの値を考えるだけなのでそんなに時間はかかりません。

左からはもちろん、an が 0 より大きいと(1)で分かっているので、0で挟みます。
問題は右からはさむ数字ですが、これは極限を考えたときに0にとぶものでないといけないので、例えば 1/n のようなものを考えます。
これが実際に an<1/nを満たしてくれるかが問題です。
これを考える際には(1)で考えた f(x)を用いましょう。an<1/nという条件を f(1/n)<0 という条件に置き換えて考えることができます。
十分大きいnに対して f(1/n)<0 は簡単に言えるのであとははさみうちの原理を使うだけです。

次に nan についてですが、まだ an に関する関係式 $e^{nan}-1=e^{an}$ を用いましょう。
an の極限はわかっているのであとは nan の形に変形して右辺を無限にとばすだけです。