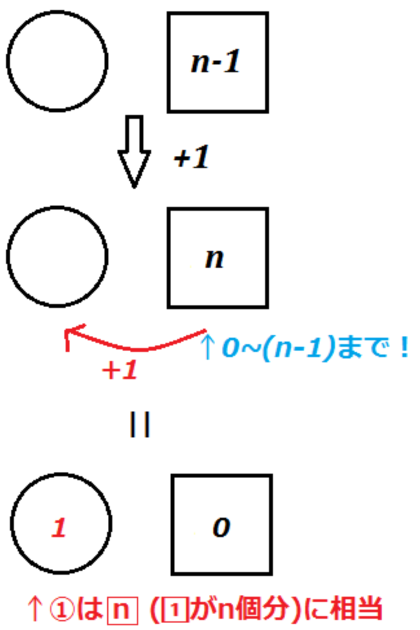
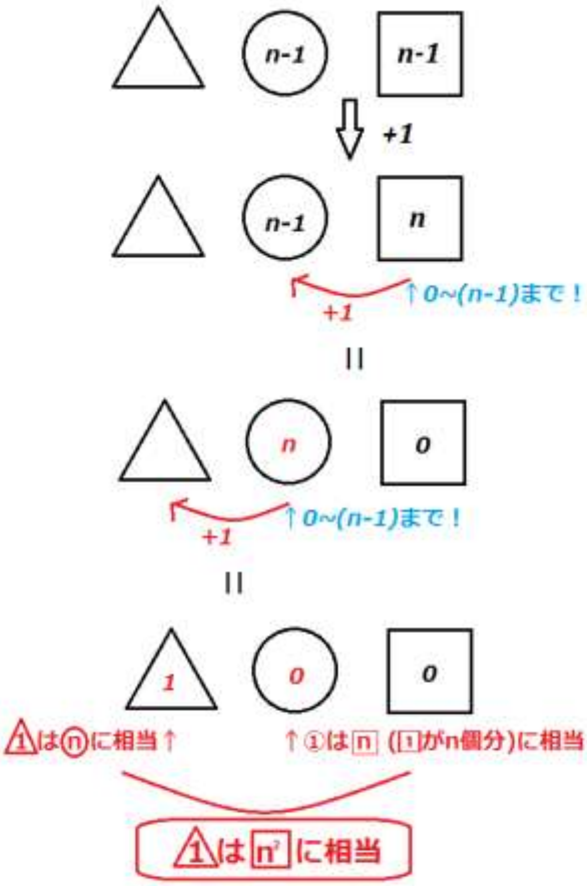
Q.(基礎問題精講数学 1A P152 例題 91)
解説の補助をお願いします。

A.　n 進法とは、ある数を **n 個ごとにまとめて数える方法**のことです。
我々の日常生活で最も馴染み深いのは 10 進法という数え方です。各位は 0〜9 までの 10 個の数を表せます。ある位の数が 9 を超えると再び 0 に戻って、一つ上の位の数が 1 増えます。これを一般的に考えてみましょう。

n 進法は、**各位の数字は 0〜(n-1)までの n 個の数字を使って表す**のが基本ルールです。つまり n 進法の「n」は、「各位の数を表すのに使える数字の個数」ということです。



これに基づき、ある位(□)の数が(n-1)のときを考えましょう。
ここで値が 1 増えると、その位(□)の数字は(n-1)より大きい数を表せません。そこで(n-1)から 0 に戻り、代わりに一つ上の位(○)の値を 1 増やすことで対応します。つまり**一つ上の位(○)の「1」は、その一つ下の位(□)の「n」個に相当する**のだと考えてください。



次に、ある位(□)の数とその一つ上の位(○)の数がどちらも(n-1)の時を考えます。
ここで値が 1 増えると、先ほど同様に 0 に戻り、一つ上の位(○)の数を 1 増やします。ところがその位(○)の数も既に上限となっています。そこでさらにその上の位(△)を用意し、そこを 1 増やすことで対応します。

ここで一番上の位(△)の「1」は二番目の位(○)の「n」に相当しますが、この(○)「n」は一番下の位(□)の「n」n 個分に相当します。ということは**一番上の位(△)の「1」は一番下の位(□)の「n^2」に相当すること**になります。

さらに位が上がるときも同様に考えられます。

このことを一般化すると、n 進法では**ある位の「1」はその k 個下の位の「n^k」に相当する**ということです。そこで 1 の位(= n^0の位)を基準に k 個上がった位を「n^kの位」と呼びます。例えば身近な 10 進法では、小さい位から順に「10^0の位」「10^1の位」「10^2の位」…すなわち「1 の位」「10 の位」「100 の位」…といった具合です。

このことを踏まえ、2 進法で表された数を 10 進法で表す方法を考えましょう。**1 の位だけは何進法であっても等価**なので、各位の数をそれぞれ 1 の位に換算し、それを 10 進法に換算します。

(1)

1011 を 10 進法に変換しましょう。

まず 1 の位はそのまま 1 です。

2^1の位は 1 なので 1 の位に換算すると$2^1 \times 1 = 2$

2^2の位は 0 なので 1 の位に換算すると$2^2 \times 0 = 0$

2^3の位は 1 なので 1 の位に換算すると$2^3 \times 1 = 8$

あとはこれらを合計して 1+2+0+8=11

つまり **2 進法における 1011 は、1 の位が 11 個ある**ことに相当します。

1 の位が 11 個ということは、これを 10 進法で表すとそのまま 11 です。

よって$1011_{(2)} = 11_{(10)}$となります。

次に 1.011 を 10 進法で表します。

小数、つまり 1 より小さい位でも上と同じ考え方で解けます。

左から2^0の位、2^{-1}の位、2^{-2}の位、2^{-3}の位です。(1)と同じく、各位の数を全て 1 の位で換算します。

1 の位はそのまま 1 です。

2^{-1}の位は 0 なので 1 の位に換算すると$2^{-1} \times 0 = 0$

2^{-2}の位は 1 なので 1 の位に換算すると$2^{-2} \times 1 = 2^{-2}$

2^{-3}の位は 1 なので 1 の位に換算すると$2^{-3} \times 1 = 2^{-3}$

これらを合計して$1 + 0 + 2^{-2} + 2^{-3} = 1 + 0 + 0.25 + 0.125 = 1.375$

整数のときと同様に換算ができることを確認しましょう。

(2)

今度は逆に 10 進法で表された数を 2 進法で書き換えます。考え方は(1)と同じです。まず 10 進法で表された 23 を全て 1 の位に換算します。

1 の位はそのまま 3 です。

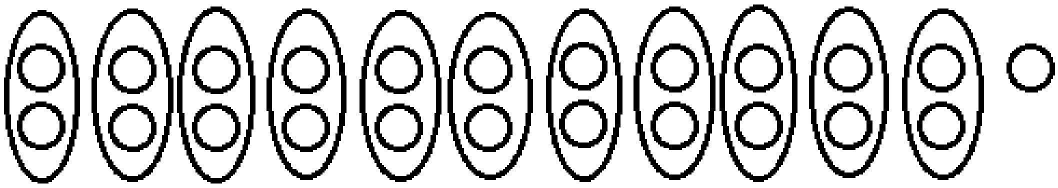
10^1の位は 2 なので10^1×2=20

これらを合計して 20+3=23

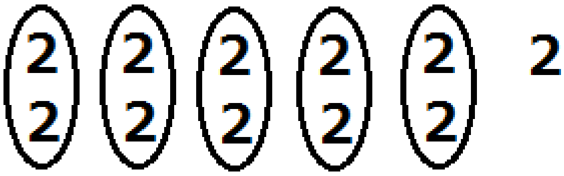
つまり、**10 進法における 23 は、1 の位が 23 個ある**ということです。当たり前のことですが 10 進法の場合、もとの数と 1 の位に換算した数が同じになります。

1 の位に換算した 23 を 2 進法で表しましょう。ここでは **2 個ずつまとめて箱詰めして**

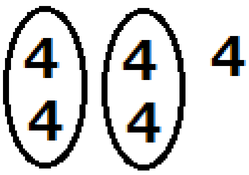
いくという考え方をとります。



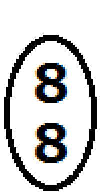
23 個のボールを 2 個ずつ箱詰めすると、何箱になりますか？23÷2=11 あまり 1 なので、11 箱できて 1 個余りますね。この余った 1 個が 1 の位の「1」となります。



次に 11 箱(ボールは2^1個入り)をさらに 2 箱ずつ箱詰めすると、11÷2=5 あまり 1 なので、5 箱できて 1 つ余ります。この余った 1 箱はボール2^1個入りなので「2^1の位」が「1」と定まります。



さらにこの 5 箱(ボールは2^2個入り)を 2 箱ずつまとめると、5÷2=2 あまり 1 なので、2 箱できて 1 つ余ります。この余った 1 箱はボール2^2個入りなので「2^2の位」が「1」と定まります。



またさらに 2 箱(ボールは2^3個入り)を 2 箱ずつまとめると、2÷2=1 なので、ちょうど 1 箱になります。ということはボール2^3個入りの箱は余らないので、「2^3の位」が「0」と定まります。最後に箱詰めした箱は、2^4個のボールがあるので、「2^4の位」が「1」と定まります。これ以上は 2 箱ずつの箱詰めができないので、ここで終了です。

以上より、10 進法での 23 を 2 進法で表すと 10111
n 進法では各位が 0～(n-1)までの数で表すので、n 以上の数が登場しないことを確認しておきましょう。

ここまでの作業を筆算で簡略化したのが問題集の(解Ⅱ)の筆算にあたります。筆算には上のような意味が込められていたということです。一般に n 進法では同じように「**n 個ずつ箱詰めしていき、余った個数がその位の数になる**」と考えてください。