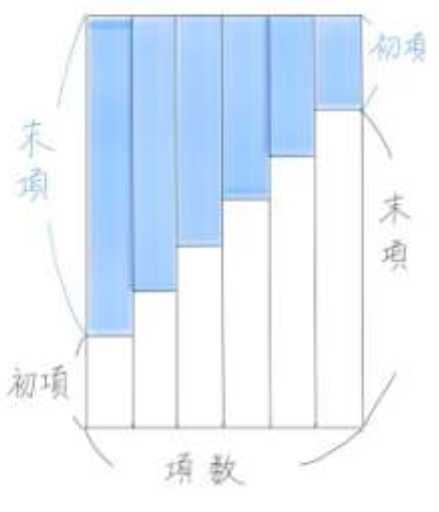
Q.(基礎問題精講数学 2B P173 例題 111)
解説の補助をお願いします。

A.　等差数列の問題で重要なのは主に次の内容です。
①例題 110 の解説のような階段をイメージすること(←等差数列を扱うときは常に頭の中で思い描けるように！)。
②初項と公差が分かれば一般項が求めれられ、それに伴って和も求められること。

ここではまず等差数列の総和の求め方について考えます。例題 110 の解説同様に、各項の大きさを高さとして表現すると、階段のようになります。総和を求めるということはこの階段の面積を求めるということです。



この階段と同じものをもう一つ用意し、2 つを合体させると長方形となります。この長方形の面積を求め、面積を半分にしたものが階段の面積、つまり等差数列の総和になります。

この長方形の横の長さは数列の項数なのでnです。また縦の長さは、初項と第n項を合わせたものなので、$a_1 + a_n$となります。

したがって、等差数列の初項から第n項までの総和をS_nとすると、

$$S_n = \frac{1}{2} \times (\text{縦}) \times (\text{横})$$

$$= \frac{1}{2} \times (a_1 + a_n) \times n$$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

となります。
この考え方を拡張すれば、等差数列の途中部分の和も求められます。
先ほどの長方形の縦の長さが**(初めの項)+(終わりの項)**、横の長さが**(項の数)**となるので、

等差数列のある部分の和の求め方は

$$\boxed{\frac{\textbf{項の数}}{\mathbf{2}}\times\left\{\left(\text{初めの項}\right)+\left(\text{終わりの項}\right)\right\}}$$

このように覚えておくと応用がききやすいです。

特に等差数列の初項(第 1 項)から第n項までの総和の場合、$a_n = a_1 + (n-1)d$を使って書き換えると、

$S_n = \frac{n}{2}\times\{a_1 + a_1 + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\times\{2a_1 + (n-1)d\}$

(1)ではこの式を利用して解くことができます。この総和を求める式は、**式自体とともに導出の過程(長方形の縦と横の長さは何か？なぜ長方形÷2 か？)も頭に入れておきましょう。**

(1)

初項から第 5 項までの総和(S_5)と第 20 項までの総和(S_{20})が与えられています。これらを**それぞれ等差数列の総和の式に代入し、連立させることで$\boldsymbol{a_1, d}$を求めます。**

$S_5 = 250$なので

$\frac{5}{2}\times\{2a + (5-1)d\} = 250$

$\Leftrightarrow 2a + 4d = 100$ －① ←両辺を 2/5 倍しました。

また$S_{20} = -50$なので

$\frac{20}{2}\times\{2a + (20-1)d\} = -50$

$\Leftrightarrow 2a + 19d = -5$ －②←両辺を 1/10 倍しました。

②－①より

$15d = -105$

$\Leftrightarrow d = -7$

これを①式に代入して

$2a + 4 \times (-7) = 100$

$\Leftrightarrow a = 64$

⑵

⑴で初項、公差を求めたので、等差数列の一般項が求められる状態になりました。

初項は64、公差は-7なので一般項は

$a_n = 64 + (n-1) \times (-7)$

$= -7n + 71$

この等差数列の総和が最大となるときがどのようなときか考えます。

この数列を実際に書いてみると

$$64, 57, 50, 43, 36, 29, 22, 15, 8, 1, -6, -13, \ldots$$

となります。

試しにS_1, S_2, S_3の値を求めてみましょう。

S_1はa_1そのものなので、

$S_1 = a_1 = 64$

S_2はa_1とa_2を足したものですが、**$\boldsymbol{S_1}$に$\boldsymbol{a_2}$を足したものともみなせます**ので

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = 64 + 57 = 121$

S_3は**$\boldsymbol{S_2}$に$\boldsymbol{a_3}$を足したもの**なので

$S_3 = S_2 + a_3 = 121 + 50 = 171$

このように考えると、初項から第n項までの**総和$\boldsymbol{S_n}$は$\boldsymbol{S_{n-1}}$に$\boldsymbol{a_n}$を足したもの**と考えることができます。

つまり、

$$\boldsymbol{S_n = S_{n-1} + a_n}$$

これを変形すると

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

この式から、a_nが正なら$S_n > S_{n-1}$なので、総和は増加します。

逆にa_nが負なら$S_n < S_{n-1}$なので、総和は減少します。

つまり、**$\boldsymbol{a_n}$の正負が、$\boldsymbol{S_n}$の増減に関わっています。**

※微分を習っている人は、$\frac{dy}{dx}$の正負がyの増減に関わっていたことを思い出してください。理屈は同じです。

今回、$a_n = -7n + 71$の正負を考えると、
$n \leqq 10$では$a_n > 0$
$n \geqq 11$では$a_n < 0$です。

n	…	10	11	…
a_n	$+$	$+$	$-$	$-$
S_n	↗			↘

↑ここでa_nの符号が変わる

つまり$n = 10$まではS_nは増え続けますが、$n = 11$からはS_nは減り続けます。
ということは総和が最大となるのは**S_nが減少し始める直前**なので、

$$n = 10$$

一般に、数列の一般項**a_nの符号が変わる(正→負または負→正となる)直前のとき、S_nが極値(極大値または極小値)をとる**ことが分かります。
※微分に置き換えると、$\frac{dy}{dx}$の符号が変わるところで、yが極値をとるのと同じです。

したがって、**数列の総和の最大値・最小値を考えるときは、a_nの符号を考えることが定石です。**