Q.(基礎問題精講 2B P60 例題 37, 38)
解説の補助をお願いします。

A.　例題 37 の解答に書かれている「参考」について説明します。
まず、$f(x,y),g(x,y)$は**x,yを含む式(x,yの関数)**を表します。
たとえば例題 37 では解答 2 行目の$x+y$や$2x-y+3$が、
例題 38 では直線の方程式の左辺、$x-2y-3$や$2x+y-1$が$f(x,y)$や$g(x,y)$にあたるのだと考えてください。

$$f(x,y)+kg(x,y)=0$$

がkに関係なく成り立つときを考えます。

kによらずに左辺が 0 にならなければいけないなら、**$f(x,y)$と$g(x,y)$のどちらも 0 であればいいことが感覚的にも分かると思います**。念のため、以下に証明を示します。

(証明)
kがどんな値でも成り立つというのなら、試しに$k=1,-1$を代入してみます。

$k=1$のとき、

$$f(x,y)+g(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y)=-g(x,y) \text{ —①}$$

$k=-1$のとき、

$$f(x,y)-g(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y)=g(x,y) \text{ —②}$$

①+②より

$$2f(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y)=0$$

これを①または②に代入すると$g(x,y)=0$

ただし、これは$k=1,-1$のときに限られたものであるので、**kがどんな値のときでも成り立つか、式に代入して確認します。**
逆に$f(x,y)=g(x,y)=0$のとき、

$$0+k\times 0=0$$

なのでkの値に関わらず成り立つことが確認できました。

以上より、$\boldsymbol{k}$**の値に関係なく**$\boldsymbol{f(x,y)+kg(x,y)=0}$**が成り立つとき、**
$\boldsymbol{f(x,y)=g(x,y)=0}$**となります。**

このように、ある変数によらず、式の左辺と右辺が等しくなる式をその文字の**恒等式**と言います(この解説の場合はkの恒等式です)。
問題文に「ある式が(文字)によらず成り立つ」とあったら**その文字について整理してあげることが基本です。**
例えばこの問題のように「kの値に関係なく成り立つ」とあれば、式を

$$\left(\text{k を含まない項}\right)+\left(\text{k を含む項}\right)=0$$

$\Downarrow$k でくくる

$$\left(\text{k を含まない項}\right)+k(\quad)=0$$

と変形します。先ほどの証明で示したように、この式が k によらず成り立つとき、**()内は全て 0 となります。**

$f(x,y)+kg(x,y)=0$がkの恒等式なら、

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

となりますが、この 2 式はいずれも図形の方程式を表すことになります
(例題 37 では$x+y=0$と$2x-y+3=0$がこれにあたります)。
この 2 式を両方とも満たすx,y、つまりこの 2 式の連立方程式の解を(x_0,y_0)とすれば、それが 2 つの図形の交点となります
(例題 37 では$x+y=0$と$2x-y+3=0$の交点$(-1,1)$のことです)。

以上より、
ある定点の座標は、連立方程式$\boldsymbol{f(x,y)=0,g(x,y)=0}$**の解**$\boldsymbol{(x_0,y_0)}$ということになります。