Q.（標準問題精講数学 2B P287 127(1)）
bを偶奇で場合分けする理由がわかりません。

A.問題文を見てから、解答を始めるまでの考え方のプロセスを説明します。

この問題ではaから始まって 2 ずつ増える等差数列を考えます。項数が最大ということは、**末項はbを超えない最大の数**となります。
等差数列の和を求めるためには、数列の**初項と末項、項数の情報が必要**なので、この 3 つの値を特定していく方針で進めます。

この問題は文字が多く抽象的なので、**まずはaやbに適当に値を代入し**、等差数列がどのようになるかいくつか実験してみましょう。
$a = 2, b = 10$ のとき

$$2, 4, 6, 8, 10$$

$a = 2, b = 9$ のとき

$$2, 4, 6, 8$$

$a = 3, b = 11$ のとき

$$3, 5, 7, 9, 11$$

$a = 3, b = 10$ のとき

$$3, 5, 7, 9$$

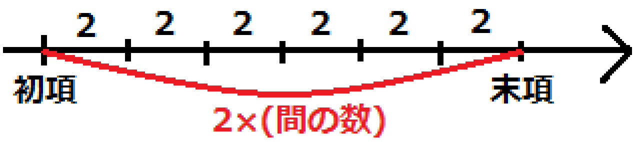
aが奇数なら全ての項が奇数、aが偶数なら全ての項が偶数となっています。
これを踏まえて末項について考えると、
aとbの偶奇が一緒であれば、末項はb
aとbの偶奇が一緒でなければ、末項は$b-1$
となることが分かります。

この実験を行うことで初めて、a, bの偶奇が一致するか異なるかで末項や項数が変わってくるため、場合分けが必要になると分かります。

また、項数の求め方にも注意が必要です。
初項と末項は以下の通りです。

①a,bの偶奇が一致するとき
初項a,末項b

②a,bの偶奇が異なるとき
初項a,末項$b-1$



図から、(初項と末項の差)=(点どうしの間の数)が出ます。これを 2 で割ると点の間の数が分かります。いま求めたいのは項数、つまり点の数です。

(点の数)=(間の数)+1

という関係があるので、以下のようになります。

①のとき、初項a、末項bなので、項数nは

$$n=\frac{b-a}{2}+1$$

②のとき、初項a、末項$b-1$なので、項数nは

$$n=\frac{(b-1)-a}{2}+1$$

等差数列の和は、

$$\{(\text{初項})+(\text{末項})\}\times\frac{(\text{項数})}{2}$$

で求められますから

①のとき、

$$(a+b)\times\frac{\frac{b-a}{2}+1}{2}=\frac{(a+b)\left(\frac{b-a+2}{2}\right)}{2}=\frac{(a+b)(b-a+2)}{4}$$

②のとき、

$$(a+b-1)\times\frac{\frac{(b-1)-a}{2}+1}{2}=\frac{(a+b-1)\left(\frac{b-a+1}{2}\right)}{2}=\frac{(a+b-1)(b-a+1)}{4}$$

となります。

このように文字が多用されている抽象的な問題では、**具体的な数値で実験**してみたり、**図を描いてみる**ことで法則性や場合分けなどを見つけ出しやすくなります。