

Q. (基礎問題精講数学 2B P175 例題 113)

解説の補助をお願いします。

A. あまりを考えるとということで、整数問題で用いる発想も必要です。まずは 2 で割ったあまりと 3 で割ったあまりがどちらも 1 になる数を調べる必要があるので、とりあえず 1 から順に、2 および 3 で割ったあまりを書き出してみましょう。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
÷2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
÷3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

表を見ると、あまりの変化が 6 ごとに繰り返しになっていることに気づきます。

そこで一つの繰り返しに着目すると、それぞれの周期の始まりでどちらもあまりが 1 となっています。

繰り返しの周期が 6 なので、2 で割っても 3 で割っても 1 あまる数が、6 ごとに登場するということです。従って、公差は 6 です。また最初に登場する、2 で割っても 3 で割っても 1 あまる数は 1 なので、初項は 1 です。

これより一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n - 1) \times 6 = 6n - 5$$

となります(等差数列の一般項については例題 110 の解説を参照)。この数列を実際に書いてみると次の通りです。

1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, ...

この等差数列 $\{a_n\}$ が第何項まで 100 以下であるかを知るためには、 a_n が 1 以上 100 以下であるような n の範囲を求めます。一般項の式より、

$$1 \leq 6n - 5 \leq 100$$

この不等式を n について解きます。

$$\Leftrightarrow 6 \leq 6n \leq 105$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{6} \leq n \leq \frac{105}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq n \leq 17.5$$

よってこれを満たす自然数 n は1~17の17個です。

例題 110~112 と同様で、等差数列ではまず初項と公差を求め、一般項を決定するのが基本的な流れで、初項と公差をどのようにして求めるかは問題によって様々です。

例題 110~112 までの初項と公差の求め方は、

例題 110...2 つの既知の項から求める

例題 111...2 つの総和から求める

例題 112...隣り合う 3 項の和から求める

となっており、上の 3 つはよく出題されます。一方で本問のように整数問題がらみで求めるといった、数列以外の分野と融合して出題されることもあるので注意しましょう。