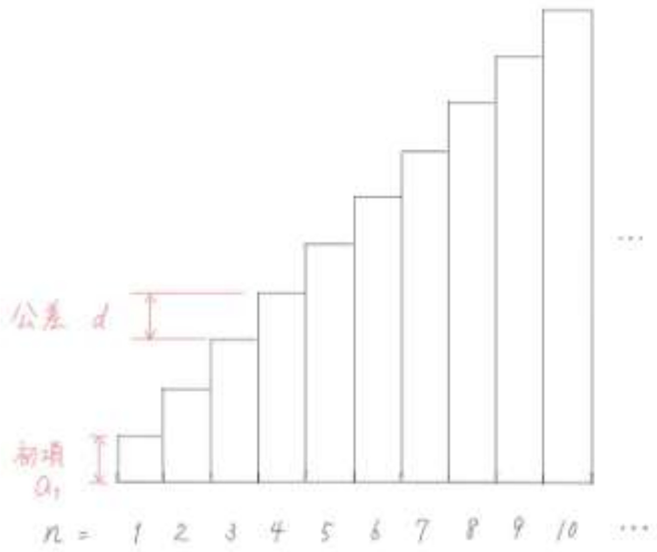
Q.(基礎問題精講数学 2B P172 例題 110)
解説の補助をお願いします。

A.　等差数列を考える上では階段をイメージすると分かりやすいです。



左のように左から 1 列目、2 列目…と棒を立て、各棒の高さがその項の数を表すとします。すると初項a_1は左端の棒の高さ、公差dは隣り合う棒同士の高さの差となります。**等差=差が等しいということなので各段の高さ(隣り合う棒の高さの差)が同じ**になります。

例えばある段から一段上ればdだけ高くなりますし、二段上れば2d高くなります…このことを一般化すると、**ある段からk段上ればkdだけ高くなります。**

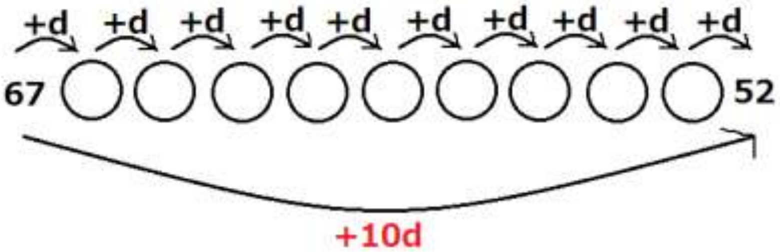
ではこの考えを使って一般項、つまりn列目の棒の高さを考えてみましょう。n列目は 1 列目より$(n-1)$段上なので、$(n-1)d$だけ高くなります。
このことから、1 列目の高さがa_1と分かっているとき、n列目の高さa_nは$a_1+(n-1)d$と表せます。これが等差数列の一般項となります。つまり、

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

さらにこの考え方を応用させて、等差数列のある 2 つの項が分かっているときの一般項の求め方を考えましょう。等差数列の一般項の式を見ると、a_1とd、つまり初項と公差が分かれば一般項を決定できます。階段のイメージで言い換えると、初めの段の高さと段差さえ決まれば階段が出来るということです。まずは一般項を知る為に初項と公差を求めます。

(1)

第 5 項が 67、第 15 項が 52 である等差数列$\{a_n\}$について、第 5 項から第 15 項までを表すと次のようになります。(値が分からない部分は〇で表します。)



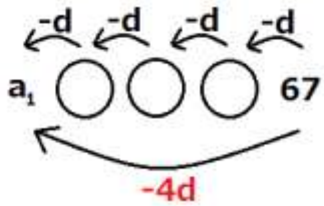
これを見ると第 5 項から 10 項進むと第 15 項になり、その間に値が 10d増えることが分かります。このことを式で表すと

$a_5 + 10d = a_{15}$

$$\Leftrightarrow 67 + 10d = 52$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$$

次に初項を求めます。下のように初項は第 5 項から 4 項戻りますが、このとき 4dだけ減ることになります。



このことを式で表すと

$a_5 - 4d = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 67 - 4d = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 67 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = a_1$

$\Leftrightarrow a_1 = 73$

本問の(1)は(2)を解くための誘導に過ぎませんが、仮に(1)の問題が無くても、**等差数列の 2 つの項が分かっているときは公差、初項の 2 つを求めておく**のが基本です。

(別解)

等差数列の一般項の式を用いて解く方法もあります。問題集の解答がこれにあたります。

第 5 項と第 15 項をそれぞれ一般項の式に代入したものが①式、②式です。

未知数はa, dの 2 つなので①、②を**連立方程式**として解くことでa, dが求められる、という方針です。

(2)

次に 20 と 30 の間にある項が何個か調べます。一般項を利用するとよいです。

(1)より、等差数列の一般項が分かります。$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 73 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

a_nが 20 と 30 の間にあるということを式で表すと

$$\mathbf{20} < 73 + (n-1)\left(-\frac{3}{2}\right) < 30$$

これを満たす n の個数を調べればよいことになります。この不等式をnについて解きます。

$$-53 < (n-1)\left(-\frac{3}{2}\right) < -43 \quad \leftarrow \text{各辺から 73 引きました}$$

$$\Leftrightarrow -43 \times \left(-\frac{2}{3}\right) < n-1 < -53 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

↑各辺を$\left(-\frac{2}{3}\right)$倍しました。負の数をかけるので**大小関係が変わります**。

$$\Leftrightarrow \frac{86}{3} < n-1 < \frac{106}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{89}{3} < n < \frac{109}{3} \quad \leftarrow \text{各辺に 1 足しました。}$$

nは整数です。両端の値を計算すると、

$$\frac{89}{3} = 29.666\ldots \ , \frac{109}{3} = 36.333\ldots$$

となるので

図のnの数直線より$30 \leqq n \leqq 36$となります。これを満たす$n = 30,31,32,33,34,35,36$の 7 個です。