

Q.(数学基礎問題精講 2B 例題 122)

解説の補助をお願いします。

A. まず、数列の表現方法には主に 2 種類あります。

一般項と漸化式です。

一般項とは $a_n=(n \text{ の式})$ という形でかかれ、 n 番目の項を求めるにはこの n に具体的な数字を入れればよいことになります。

一方で、漸化式というのは、数列に関する規則性を ある項と次の項の関係性 として表したものです。

例えば奇数の数列 $\{1,3,5,7,9,\dots\}$ を考えてみたときに、

一般項では $a_n=2n-1$

漸化式では $a_{n+1}=a_n+2, a_1=1$ となります。

(漸化式では初項の情報も必要になるので注意してください。)

一般項の方が、何番目の項が何かはすぐわかるので、より簡単な表現方法です。

ただ、漸化式で書いた方が簡単になる数列も存在して、例えば $\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots\}$ というように、一つ前と二つ前の数字を足したものがその項になる“フィボナッチ数列”では一般項で表現しようとするとうごく複雑な式になってしまいます。一方で漸化式では

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, a_1=1, a_2=1$

というように、定義通りに簡単に表現できることとなります。

多くの問題では漸化式が与えられて一般項を求めるという流れになります。

漸化式の解き方は、やり方が決まっているので、そのやり方を理解して問題を解いて習得すれば間違いなく得意分野にできるので、まずはやり方を理解するところから始めましょう。

(1) は等差数列の漸化式です。

最初見ただけでは、これが等差数列の漸化式だと判断できないと思います。

そのようなときには、具体的な数字を代入してみてその数列の規則性を考えてみることが大切になります。この考え方は、難しい漸化式の問題でも有効になってくるのでしっかり覚えておいてください。

今回の場合は $n=1$ ととき 1、 $n=2$ のとき 3、 $n=3$ のとき 5、 $n=4$ のとき 7・・・

というようにして見て観ると奇数の数列だということに気付けます。

あとは初項 1 公差 2 の等差数列として一般項を書くことができます。

等差数列の漸化式は $a_{n+1}=a_n+d$ と書けます。このとき公差が d です。

これは一つ前の項に公差を足すと次の項になるという公差数列の定義からもわかりやすい式だと思います。

(2) は等比数列の式です。

これも具体的に考えてみると

$n=1$ のとき 2、 $n=2$ のとき 6、 $n=3$ のとき 18、 $n=4$ のとき 54 というようにかけ、初項 2 公比 3 の等比数列だということに気付けます。

等比数列の漸化式は $a_{n+1}=ra_n$ と書けます。このとき公比が r です。

これも一つ前の項に公比をかけると次の項になるという公比数列の定義からもわかりやすいと思います。

(3) は階差数列の式です。

具体的に考えてみると

$n=1$ のとき 0、 $n=2$ のとき 1、 $n=3$ のとき 5、 $n=4$ のとき 14、 $n=5$ のとき 30・・・となります。

規則性を見つけるために、ふたつの項の差を考えてみると、順に 1、4、9、16・・・というように平方数となっています。これは漸化式からも容易に予想が付きま

あとは階差数列の一般項が n^2 であることから、この階差数列の一般項も求めることができます。

階差数列の一般項は $a_{n+1}=a_n+f(n)$ という形で表され、階差数列に当たる部分が $f(n)$ となり、一般項を求める際には $f(n)$ の和を考えることとなります。