

Q.(基礎問題精講数学 2B P174 例題 112)

解説の補助をお願いします。

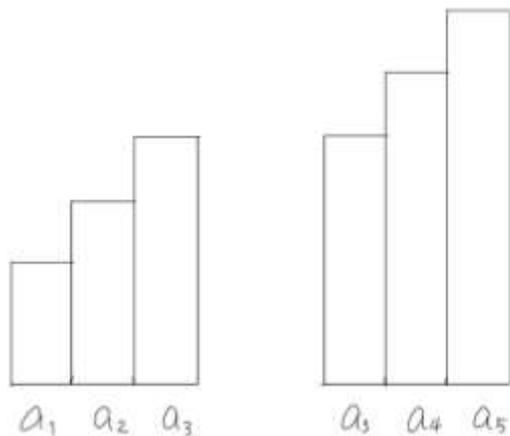
A. 等差数列の問題で重要なのは主に次の内容です。

①例題 110 の解説のような階段をイメージすること(←等差数列を扱うときは常に頭の中で思い描けるように！)。

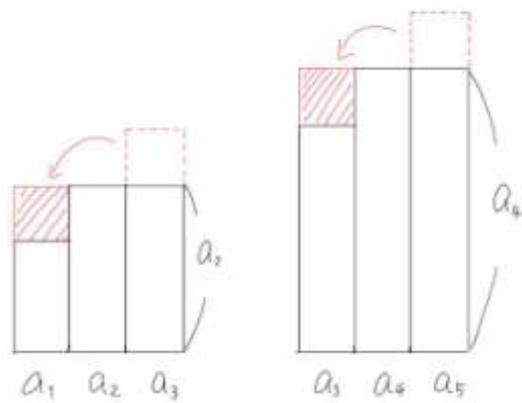
②初項と公差が分かれば一般項が求められ、それに伴って和も求められること。

一般項が分かっただけではあらゆる問題に対応しやすくなります。そこでまずは初項と公差を求め、一般項を決定します。

問題を見ると隣り合う 3 つの項の和が 2 つ与えられています。もしこれを連立方程式とみなすなら、5 つの未知数($a_1 \sim a_5$)に対して式が 2 つしかないので、 $a_1 \sim a_5$ それぞれを求めるのは難しそうです。そこで $a_1 \sim a_5$ が等差数列の項という特徴を生かして、一部の項の値を特定しましょう。



例題 110 の解説のように、 $a_1 \sim a_3$ と $a_3 \sim a_5$ の各項の値を棒の高さで表すと、左のようなイメージです。



これを左のように変形すると、高さがそれぞれ a_2, a_4 で、横の長さがいずれも 3(項の数)の長方形となります。それぞれの面積(項の和)は変わらず 3 と 33 です。

これより、 a_2, a_4 が求まります。

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 1$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 = 33$$

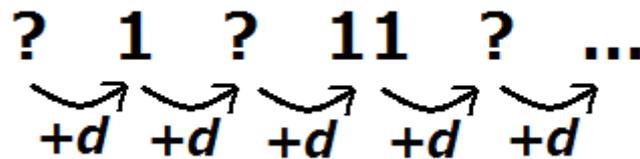
$$\Leftrightarrow a_4 = 11$$

これで 2 つの項が分かりました。2 つの項が分かっているときの初項と公差の求め方は例題 110 と同じです。例題 110 の解説も参照してください。

数列は

? 1 ? 11 ? ...

となっています。



まずは公差を求めます。第 2 項から $2d$ 増えて第 4 項になります。つまり

$$a_2 + 2d = a_4$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2d = 11$$

$$\Leftrightarrow 2d = 11 - 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow d = 5$$

さらに、第 2 項から d だけ減ると初項になります。つまり

$$a_2 - d = a_1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 5 = a_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -4$$

(別解)

a, d を求めるときに等差数列の一般項の式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ を用います(この式の導出は例題 110 の解説を参照)。この式に $a_2 = 1, a_4 = 11$ をそれぞれ代入します。すると a, d の

連立方程式になるので、それを解くことで a, d を求めます。

$n = 2$ のとき

$$a_2 = a_1 + (2 - 1)d \Leftrightarrow 1 = a_1 + d - \textcircled{1}$$

$n = 4$ のとき

$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d \Leftrightarrow 11 = a_1 + 3d - \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$10 = 2d$$

$$\therefore d = 5$$

これを $\textcircled{1}$ か $\textcircled{2}$ のどちらかに代入すると、 $a_1 = -4$

(2)

途中部分の項の和を求めます。

その前にこの数列の一般項を求めておきましょう。

初項が -4 、公差が 5 の等差数列なので、一般項は

$$a_n = -4 + (n - 1) \times 5$$

$$= 5n - 9$$

ここから、第 10 項から第 19 項までの和を求めます。

ここで例題 111 の解説に記した、等差数列の和の式を用います。

$$\boxed{\frac{\text{項の数}}{2} \times \{(\text{初めの項}) + (\text{終わりの項})\}}$$

項の数は 10 、初めの項は a_{10} 、終わりの項は a_{19} なので、求めたい和は

$$\frac{10}{2} \times (a_{10} + a_{19})$$

a_{10} と a_{19} の値を求めます。一般項の式より、

$$a_{10} = 5 \times 10 - 9 = 41$$

$$a_{19} = 5 \times 19 - 9 = 86$$

従って求めたい和は、

$$\frac{10}{2} \times (41 + 86) = 635$$

等差数列を解く上での基本的な求め方は

初項(a_1)、公差(d)を求める→一般項(a_n)を求める→和を求める

という流れです。ただしどのような問題でも必ず階段のイメージを常に思い浮かべましょう。