

Q.(標準問題精講ⅡB 例題 9)

解説の補助をお願いします。

A.

[回答者の頭の中]

余りを考える問題は $f(x)=Q(x)m+n$ と考える。 $f(x)$ が元の数式で $Q(x)$ が割る数で、商が m で余りが n だとする。ここで、 n の最高次数は $Q(x)$ の最高次数より低い。

例えば $f(x)=x^4 - 3x + 2$ 、 $Q(x)=x^2$ とすると $m=x^2$ 、 $n=-3x+2$ となる。先に n の最高次数は 1、 $Q(x)$ の最高次数は 2 である。 N の最高次数が $Q(x)$ の最高次数より低いのが確認できた。また、余りの問題については、2 項定理をよく使うので、定石として覚えておく。

[解説]

(1) $x^{3m}+1$ を x^3-1 で割った時の余りを考える。 $Q(x)=x^3-1$ となるから、 x^{3m} をうまくバラして、 x^3-1 でくくれるようにする。 $x^3-1=X$ としておけば、 $x^{3m}=(X+1)^m$

2 項定理を利用して $(X+1)^m=\sum_{k=0}^m {}_m C_k X^k$ によって、 $(X+1)^m=LX+1$ とおける。

よって $x^{3m}+1=LX+2$ となる。よって余りは 2 となる。 x^3-1 の最高次数は 3 であり、余りは 2 であるので、最高次数より、低いということも確認できる。

(2) x^n+1 を x^2+x+1 で割る。 x^2+x+1 の形に注目すると、これは x^3-1 を展開した形である。

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ となる。 $x^3=(x-1)(x^2+x+1)+1$ よりこれを(1)同様に考えればよい。 n

が 3 倍かどうかで、場合分けが必要なことに気づかなければいけない。 $x^2+x+1=Y$ と置く。

$n=3k$ の時 $x^{3k}=(Y+1)^k=NY+1$ 、(N は Y のでまとめた式) $n=3k+1$ の時

$x^{3k+1}=x(Y+1)^k=xNY+x$ 、 $n=3k+2$ の時、 $x^{3k+2}=x^2NY+x^2=x^2NY+Y-x-1$ となるこれをま

とめて答えを出してあげればよい。