

Q.(標準問題精講ⅡB 例題 9)

解説の補助をお願いします。

A.

[回答者の頭の中]

余りを考える問題は  $f(x)=Q(x)m+n$  と考える。 $f(x)$ が元の数式で  $Q(x)$ が割る数で、商が  $m$  で余りが  $n$  だとする。ここで、 $n$ の最高次数は  $Q(x)$ の最高次数より低い。

例えば  $f(x)=x^4 - 3x + 2$ 、 $Q(x)=x^2$ とすると  $m=x^2$ 、 $n=-3x+2$ となる。先に  $n$ の最高次数は 1、 $Q(x)$ の最高次数は 2 である。 $N$ の最高次数が  $Q(x)$ の最高次数より低いのが確認できた。また、余りの問題については、2項定理をよく使うので、定石として覚えておく。

[解説]

(1) $x^{3m}+1$ を  $x^3-1$ で割った時の余りを考える。 $Q(x)=x^3-1$ となるから、 $x^{3m}$ をうまくバラして、 $x^3-1$ でくくれるようにする。 $x^3-1=X$ としておけば、 $x^{3m}=(X+1)^m$

2項定理を利用して  $(X+1)^m=\sum_{k=0}^m {}_m C_k X^k$  によって、 $(X+1)^m=LX+1$ とおける。

よって  $x^{3m}+1=LX+2$ となる。よって余りは 2 となる。 $x^3-1$ の最高次数は 3 であり、余りは 2 であるので、最高次数より、低いということも確認できる。

(2) $x^n+1$ を  $x^2+x+1$ で割る。 $x^2+x+1$ の形に注目すると、これは  $x^3-1$ を展開した形である。

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ となる。 $x^3=(x-1)(x^2+x+1)+1$ よりこれを(1)同様に考えればよい。 $n$

が 3 倍かどうかで、場合分けが必要なことに気づかなければいけない。 $x^2+x+1=Y$ と置く。

$n=3k$ の時  $x^{3k}=(Y+1)^k=NY+1$ 、( $N$ は  $Y$ のでまとめた式)  $n=3k+1$ の時

$x^{3k+1}=x(Y+1)^k=xNY+x$ 、 $n=3k+2$ の時、 $x^{3k+2}=x^2NY+x^2=x^2NY+Y-x-1$ となるこれをま

とめて答えを出してあげればよい。