Q.(標準問題精講 1A P184 例題 83)
解説の補助をお願いします。

A.
3 人でじゃんけんをするときを考えてみてください。あいこは抜きにしても 1 回で順位は決まりません。**(a)まず 1 人だけ勝つか、1 人だけ負ける回**があります。**(b)次に残った 2 人でじゃんけんをして決着がつく回**があり、ここで初めて 3 人の順位が決まります。(a)(b)以外の回は全てあいこになります。

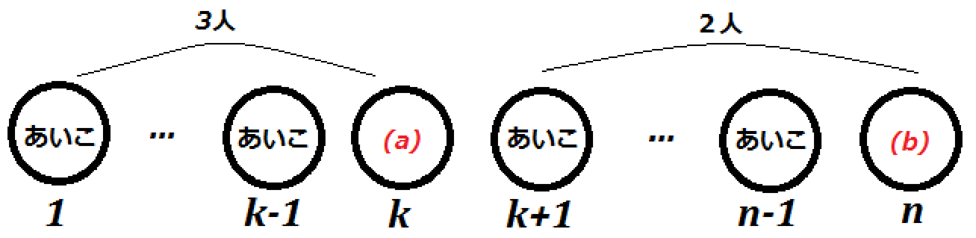
まず対戦人数が 3 人、2 人のときのあいこになる確率と決着がつく確率をそれぞれ考えます。
(ⅰ)対戦人数が 3 人のとき
あいこになるのは全員が同じ手を出すか、全員が異なる手を出すときです。全員が同じ手を出すのはグーのみ、チョキのみ、パーのみの 3 通りです。
また、全員が異なる手を出すのは、グー、チョキ、パーという 3 つの手を 3 人に割り振ると考えると 3!=6 通りです。
3 人の手の出し方の総数は 3^3=27 通りなので
あいこになる確率は(3+6)/27=1/3 です。
あいこにならなければ必ず決着がつくので、決着がつく確率は余事象から 1-1/3=2/3 です。
※1 人だけ勝っても、1 人だけ負けても、以降は残った 2 人が戦うことに変わりありませんので、決着のつき方(1 人だけ勝つか、1 人だけ負けるか)で(ⅱ)の場合分けをする必要はありません。

(ⅱ)対戦人数が 2 人のとき
あいこになるのは 2 人が同じ手を出すときなので、グー、チョキ、パーの 3 通りです。
2 人の手の出し方の総数は 3^2=9 通りなので、あいこになる確率は 3/9=1/3 です。あいこでなければ決着がつくので、決着がつく確率は余事象から 1-1/3=2/3

(ⅰ)(ⅱ)より、(a)(b)が起こる確率はいずれも 2/3 で、あいこになる確率は対戦人数によらず 1/3 ということが分かりました。これを踏まえて P(n)について考え

ます。

P(n)を求めるとき、(b)は必ず n 回目に起こらなければなりませんが、(a)は 1 回目から n-1 回目のどこで起こっても構いません。



(a)までにあいこ k-1 回　　　　　(a)から(b)までにあいこ(n-1)-k 回

仮に(a)が k 回目(1≦k≦n-1)に起こったとして、$P(n)_k$(添え字は(a)が何回目に起こったかを表します)を計算してみると、(a)と(b)では確率 2/3、あいこでは確率 1/3 なので上の図を参考にすると、

$$
\begin{aligned}
P(n)_k &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)-k} \times \frac{2}{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{(k-1)+\{(n-1)-k\}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{2^2}{3^n} = \frac{4}{3^n}
\end{aligned}
$$

となって、(a)の起こる k(回目)に関係なく一定の値となります。

ということは(a)が 1 回目に起こる場合から n-1 回目に起こる場合までを全て合わせると、全体として上の答えに n-1 かけてあげればよいことになります。

以上より

$$
P(n) = (n-1) \times \frac{4}{3^n} = \frac{4(n-1)}{3^n}
$$