Q.(標準問題精講数学 I A 例題 56)
解説の補助をお願いします。

A.
(1)【方針】
空間図形問題は空間のまま考えると混乱してしまいます。しかし、例えば三角錐の 1 つの面だけに着目すると、平面として捉えることができます。空間図形に関してよりも、平面図形に関する公式は遥かに多いです。そこで**空間を平面に落として考え、空間に存在する平面一つずつに着目し、図形的な性質を適用させる**と解答への糸筋が見えやすくなります。

辺の長さを求める問題では、一般的に以下の流れで解くことができます。
①求めたい辺の長さを文字(この問題では x)で置く
②他の辺の長さをその文字(x)を使って表す
シラミ潰しに一つずつの辺の値を書き出すのもよいですが、**特に求めたい辺を含む平面図形(主に三角形)などに着目する**と効率が上がります。問題文に書かれている条件や角度に関する条件にも注意しましょう。

③平面図形の特徴から文字(x)を用いた方程式を立てる
方程式とは同じ値を等号で結んだものなので、「方程式を立てる」=「図形上で共通なものを探す」ことです。**共通辺や共通角に着目しましょう**。

④方程式を解く
図形的な条件(辺の長さは必ず正、角度に関する条件など)に注意しましょう。
この流れに準じて解説していきます。
【解説】
①求めたい辺 CD の長さを x(>0)とおきます。

②辺 CD を含む平面図形は、△ADC、△EDC、△BDC の 3 つです。それぞれの三角形一つずつに着目します。
その前に、問題文にある辺 CD に関する条件「辺 CD は底面 ABC に垂直である」を見ておきましょう。この条件を平面に落としてあげると、「辺と平面が垂直」

⇔「辺と、平面上の全ての辺が垂直」ということになります。つまり、辺 CD に対して辺 AC、辺 FC、辺 BC がそれぞれ垂直です。

では、△ADC、△EDC、△BDC について着目します。
△ADC について
∠DAC=30°、∠ACD=90°なので、辺の長さが$1:2:\sqrt{3}$の三角形です。よって AD=2x、AC=√3x です。

△EDC について
∠DEC=45°、∠ECD=90°なので、直角二等辺三角形です。よって ED=$\sqrt{2}$x、EC=x です。

△BDC について
∠BDC=60°、∠BCD=30°なので、辺の長さが$1:2:\sqrt{3}$の三角形です。よって BD=$\frac{2}{\sqrt{3}}$x、BC=$\frac{1}{\sqrt{3}}$x です。

AE=EF=FB=1 という条件があるので、これで三角錐全ての辺の長さが分かりました。

③先ほど△ADC、△EDC、△BDC の平面図形は使いました。まだ使っていない平面は平面 ABC だけです。

平面 ABC について
方程式を立てるため、ここから 2 つのものの共通部分探しをします。この問題の関門です。
まず見て分かることは、辺 EC によって平面 ABC は△AEC と△BEC に分割されています。この二つの三角形の共通部分は辺 EC なので、辺 EC の長さを他の辺の長さを使って表すことにします。
三角形の一辺を他の辺を使って表す式といえば余弦定理がありますが、余弦(cos)が不明なため、立てられません。
共通辺でダメなら共通角を探してみましょう。

ここで着目する三角形を△ABC と△AEC に変えると(このような三角形の捉え方に慣れましょう)、**∠CAB の角が共通です。**
余弦定理は三角形の一つの内角の cos を 3 つの辺の長さで表すことが出来ます。2 つの三角形（△ABC,△AEC）の各辺の長さは全て分かっているので cos∠CAB に注目すれば x の方程式が立てられそうです。

△ABC について、余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{CAB} = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} = \frac{\frac{8}{3}x^2 + 9}{6\sqrt{3}x}$$

△AEC について、余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{CAE} = \frac{CA^2 + AE^2 - EC^2}{2 \cdot CA \cdot AE} = \frac{2x^2 + 1}{2\sqrt{3}x}$$

∠CAB=∠CAE なので

$$\frac{\frac{8}{3}x^2 + 9}{6\sqrt{3}x} = \frac{2x^2 + 1}{2\sqrt{3}x}$$

x=CD>0 なので、両辺に$6\sqrt{3}x$をかけて

$$\frac{8}{3}x^2 + 9 = 3(2x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{3} - 6\right)x^2 = 3 - 9 \Leftrightarrow \quad \frac{10}{3}x^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{5}$$

x > 0 なので、$\mathrm{x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

※着目する三角形を△ABC と△EBC にすると∠CBA が共通として方程式を立てることもできます。

(2)

【方針】

cosθを求める問題です。まず**何が分かればcosθが分かるか**考えます。角θを含む△DFCは直角三角形です。ということは、cosθ=FC/DFです。さらにDC=x=3/√5と既知なので、FCかDFのいずれかの長さが分かれば、△DFCについて三平方の定理を用いてもう一方の辺の長さも求められます。

次にDFとFCのどちらを求めるか考えます。DFを含む平面ABDと、FCを含む平面ABCとでは、**より既知情報が多いのは平面ABC**なので、まず平面ABCに着目してFCを求める方針で進みます。

【解説】

FCを含む平面ABCに再び着目します。

FCを含む三角形は△CAF、△CEF、△CFBがあります。これらの三角形はFC以外の全ての辺の長さが既知ですが、(1)の結果から**△CAF だけはcos∠CAF(=cos∠CAB)の値も分かっています**。そこで△CAFに着目します。

2辺とその間の角が分かっていれば余弦定理で残りの辺も分かります。したがって△CAFについて余弦定理より

$$\mathrm{FC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AF}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AF}\cdot\cos\angle\mathrm{CAF}$$

$$= (\text{略}) = \frac{1}{5}$$

よって $\mathrm{FC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

これでFCの値が分かったので、△DFCについて三平方の定理より

$\mathrm{DF}^2 = \mathrm{FC}^2 + \mathrm{CD}^2$

$= 2$

よって DF=$\sqrt{2}$

以上より、

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DF}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

※解説で何度も出てきているように、三角形の辺の長さを求める際には余弦定

理をよく使いますので、**どのような時に余弦定理が使えるのか自学する中で常に意識しながら**解いていってください。