

数学ⅡB 標準問題精講 解説

P40 | 標問15 (研究)

・相加平均・相乗平均では、不等号 (\geq) の右側は定数にならなくてはいけない
「研究」で伝えたいことは、とてもシンプルです。それは、

相加平均・相乗平均では、不等号 (\geq) の右側は定数にならなくてはいけない

ということです。具体的には、次の赤字が定数になっていなければなりません。

$$x + \frac{16}{x+2} \geq 8\sqrt{\frac{x}{x+2}} \quad \dots \quad (\star)$$

現状では、 x が残ってしまっています。

・(★)が意味しているのは「左辺の式は、右辺の式よりも大きい」ということ

(★)の左辺を $f(x)$ 、右辺を $g(x)$ とおくと、解説に掲載しているグラフのように、確かに $f(x)$ は常に $g(x)$ 以上の値になります。

ついでに $x + \frac{16}{x+2} = 8\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ となる点 $x = -1 + \sqrt{17}$ で接していることもわかります。

しかし、 $f(x)$ が $g(x)$ 以上である、ということがわかったとしても、 $f(x)$ の最小値を求めたことにはなりません。 $f(x)$ の最小値 m とは、言い換えると、

ある定数 m よりも $f(x)$ が常に大きいような m のこと

です。ある関数 $g(x)$ よりも $f(x)$ が常に大きいことがわかったところで、今回のように、 $f(x)$ は $x=2$ で最小値 $f(x)=6$ が存在してしまいます。

・まとめ

色々お話ししましたが、結局、覚えておくべきことは

相加平均・相乗平均では、不等号 (\geq) の右側は定数にならなくてはいけない

です。これだけ覚えておけば大丈夫です。
