

Q. (標準問題精講 2B 例題 48(2))

差をとるところは分かるのですが、その後の流れが分かりません。

A.

①と②の接点における共通接線③とは、

条件 A: 「③は、①と②の接点を含む直線である」

条件 B: 「直線③が、①と②両方の接線になっている」

の両方を満たす直線でなければなりません。

まず、③は①と②の連立方程式(①も②も満たしている方程式)から導かれているので、一つ目の条件 A を満たしていることがわかります。ただし、これだけではもう一つの条件 B を満たしているとは限りません。差をとって③を求めた後の流れは、この条件 B を満たしていることを示すためのものです。

最初に、③が①の接線になっていることを確認します。

一番下にざっくりとした流れの説明図をつけたので見てください。

①②③の共有点を P とします。

具体的には、③と①の共有点はすでに P が 1 つ見つかったので、このほかに共有点がなければこの二つのグラフの共有点は 1 つとなり③は①の接線であることが言えます。(右図参照)

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \quad \text{①}$$

$$4x + 3y - 29 = 0 \quad \text{③}$$

ここで、(①の左辺) $- 2 \times$ (③の左辺) を計算すると

$$(x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6) - 2 \times (4x + 3y - 29) = 0$$

$$\text{①左辺} (= 0) \qquad \qquad \qquad \text{③左辺} (= 0)$$

0 となります。この式は、①と③両方の条件を満たしているので、①と③の共有点を通ることになります。

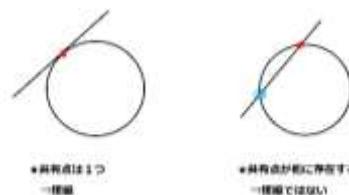
ここで、この式を整理すると、

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y + 52 = 0 \quad \text{となり、②と一致してしまいます。}$$

この式は①と③の共有点を通る式なので、これが②と一致するということは、①と③の共有点は必ず②上にあるということです。

つまり、直線③と①の共有点は②との接点でもある点 P の 1 つだけで、他に共有点は存在しないため、③は①の接線であるということがわかります。

同様にして、②と③を連立させて二つの共有点を調べると、必ず①との共有点でもある点 P になります。このことから、直線③と②も P 以外に共有点を持たないため、直線③は②の接線であることがわかります。



④この係数は、式を整理した結果が②と一致するようにわざと 1 と -2 に決めています

これらのことから、直線③は①、②両方の円の接線であることがわかり、先ほど述べた条件 B「直線③が、①と②両方の接線になっている」が言えました。

よって、先ほど述べた条件 A、B 両方が揃い、直線③は接点における共通接線であることが示せました。

解答は、「③と①が接点 P 以外に共有点をもつ」と仮定したうえで、上記の流れで矛盾を導き、背理法により「③と①の共有点は接点 P のみである」ということを証明しています。

【③が①の接線であることを証明する流れ】

