

Q.(数3標準問題精講 p204 研究)

なぜ積分範囲を $\frac{\pi}{n}$ から a に変えても S は $\frac{2}{n}$ になるのですか。

A.

まず、積分範囲を変えても S が変化しないわけではありません。

最初に、解き方の流れを説明すると、

n を変化させたときの S が直接は求めにくいので、積分範囲に面積が比例する (①) T の面積を求めた上で、 n を変化させても S と T との比が一定である (②) ことを利用して S を求めます。

①・・・ T は区分求積により考えると、高さが常に1の長方形なので、面積は積分範囲(底辺の長さ)に比例することになります。

②・・・ $\frac{S}{T} = \frac{2}{\pi}$ (一定) になることから、 S の面積は n を変化させてもいつも T の $\frac{2}{\pi}$ 倍になり、 T に比例することがわかります。

ここで、 T の積分範囲を0から a までにすると $T = \int_0^a 1 dx = a$ です。

次に、②より常に S は T の $\frac{2}{\pi}$ 倍であることから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} In &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a |\sin nx| dx \\ &= \frac{2}{\pi} T = \frac{2}{\pi} \int_0^a 1 dx = \frac{2}{\pi} \cdot a \quad \text{となります。} \end{aligned}$$