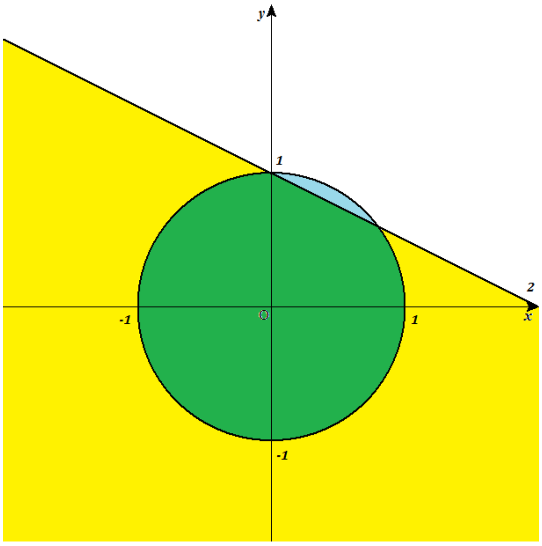
Q.(標準問題精講数学 2B P127 例題 58)
解説の補助をお願いします（特に、領域の考え方について)。
A.
領域問題では式（方程式や不等式）とグラフを頻繁に行き来します。**式をグラフ化できるか、逆にグラフを式化できるか、この互換能力を養うこと**が重要です。
(1)
領域 D は 2 つの不等式によって定義されています。この 2 つの不等式がグラフ的に何を意味するのか考えます。

$(a)\ x^2+y^2-1 \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leqq 1$
これが不等号でなく等号だったら、原点が中心の半径 1 の円を表すことになります。
そもそも**円とはある点（中心）から距離が同じ点の集合**で、一般形は $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ と書きます。左辺は任意の点(x,y)とある点（中心）(x_0,y_0)の**距離の 2 乗**を表しており、右辺がその距離の値(半径)の 2 乗を表しています。いま、$x^2+y^2 \leqq 1$ということは**任意の点と中心(原点)の距離が 1 以下**という事を表しています。これをグラフで解釈すると、原点中心で半径 1 の円の内部と周です。知っていれば当たり前のことですが、普段から意識できているか確認しましょう。
もう一つの不等式について

(b) $x+2y-2 \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leqq -\frac{1}{2}x+1$
こちらは右辺が一次関数で、グラフでは直線を表します。y が右辺より小さいということですから、$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+1}$**の直線上とそれよりも下側の領域**を表します。また、直線と円の交点は

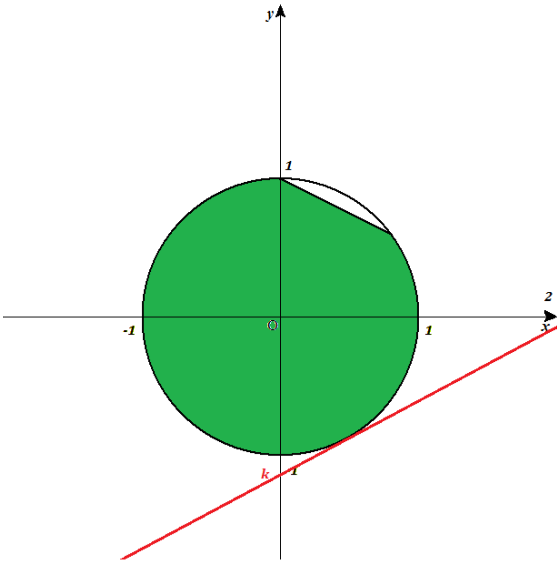


$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$$
の解となり、これを解くと
$(x,y)=(0,1),\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$
となります。以上より、
(a)(水色)(b)(黄色）の領域の共通部分

(緑色)が D となります(ただし境界含む)。
(2)(3)
x,y がある領域内で動くときの ax+y の最大値・最小値を考える問題です。この問題を**線型計画問題**といい、この問題に対する解法を**線型計画法**と呼びます。線型計画法ではグラフをイメージできることが重要です。

【線形計画法のポイント】
1.まず最大、最小を考える値を=k とおきます。
ax+y=k
つまり **k の最大、最小を求めればよい**ことになります。
2.上の方程式を y=-ax+k と、一次関数の形に変形します。このように変形することで傾きが-a で、**k は切片**の直線であることを意識してください。
3.y=-ax+k をグラフに描くことを考えます。いまは k の最大、最小の場所がわかればよいので、k つまり**切片の最も高くなる場所と低くなる場所がどこになるか**考えます。
4.ax+y=k は「D の領域で動く」という条件があります。これをグラフ上で解釈すると、「**直線 ax+y=k が領域 D と共有部分をもつ**」という意味です。(1)で求めた領域 D と**カブる場所**に直線が存在している必要があります。

これらを踏まえ、グラフ上のどこで切片が最大値、最小値をとるか自分で描いて試しましょう。



(2)まず最小値を考えると、下のように直線 y=-ax+k 領域 D の**下側と接する**(つまり円の周と接する)時に切片 k が最も低くなります。このときの切片 k を求めましょう。
問題集の解答のような求め方が最も一般的ですが、グラフと式の相互関係を考えると、別の視点から k を求められます。円と直線が接するということは、円の方程式と直線の方程式の連立方程式が**重解をもつ**ということです。

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 — ① \\ y=-ax+k — ② \end{cases}$$

直線が円と下側で接すると切片は必ず負になるので、

$k < 0$ —③

②を①に代入して$x^2+(-ax+k)^2=1 \Leftrightarrow (a^2+1)x^2-2akx+k^2-1=0$

この2次方程式が重解を持つということは、**判別式D=0を思い出しましょう。**

$(a^2+1)x^2-2akx+k^2-1=0$の判別式をDとすると、これが重解を持つとき、

D=0

$\Leftrightarrow 4a^2k^2-4(a^2+1)(k^2-1)=0$

$\Leftrightarrow a^2k^2-(a^2+1)(k^2-1)=0$

これをkについて変形することでkを求められます。

$a^2k^2=(a^2+1)(k^2-1)$

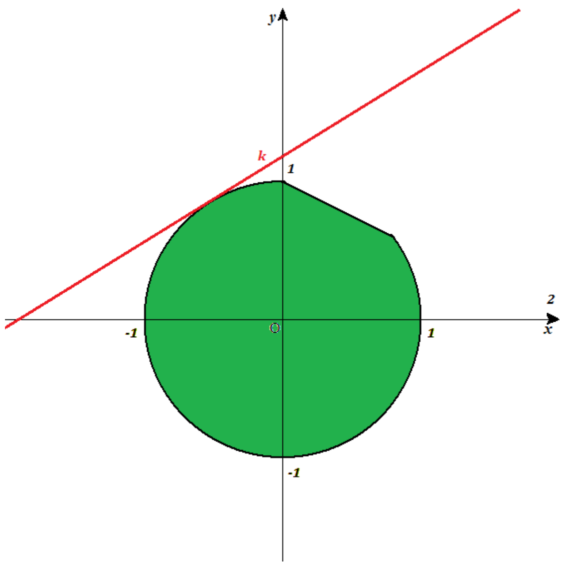
$$\Leftrightarrow \quad \frac{k^2}{k^2-1}=\frac{a^2+1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k^2-1+1}{k^2-1}=\frac{a^2+1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{k^2-1}=\frac{a^2+1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k^2-1}=\frac{a^2+1}{a^2}-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad k^2-1=a^2 \Leftrightarrow \quad k^2=a^2+1$$

③より、$k=\sqrt{a^2+1}$が除外されて、

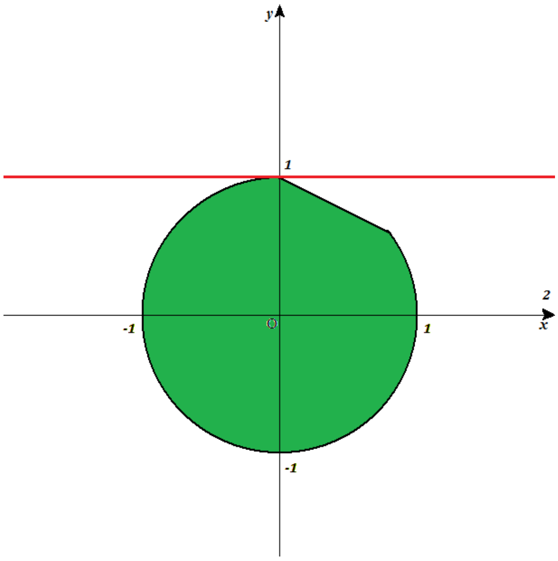
$k=-\sqrt{a^2+1}$



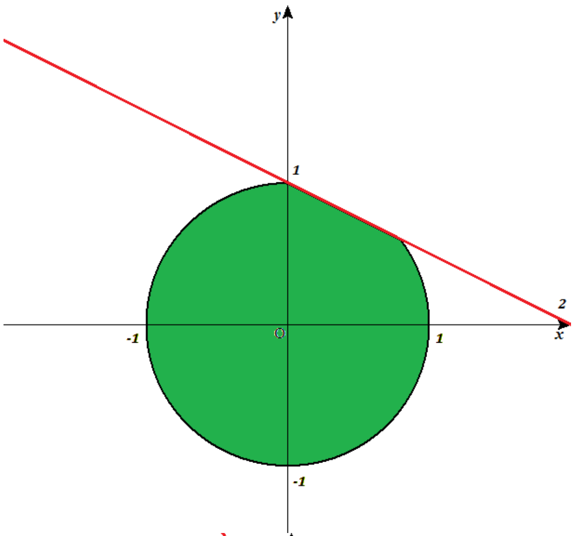
(3)次に最大値を考えます。D の領域は上の部分の円が少し欠けているため、(2)よりも少し複雑になります。直線を**領域 D と接しながら時計回りに転がす**イメージで考えてみましょう。直線が回転する⇔傾きが変わる⇔a の値が変わるということなので、a の値で場合分けが生じますが、ここでは説明の便宜上、最後に考えることにします。

(ⅰ)直線が領域Dと第2象限で接するとき

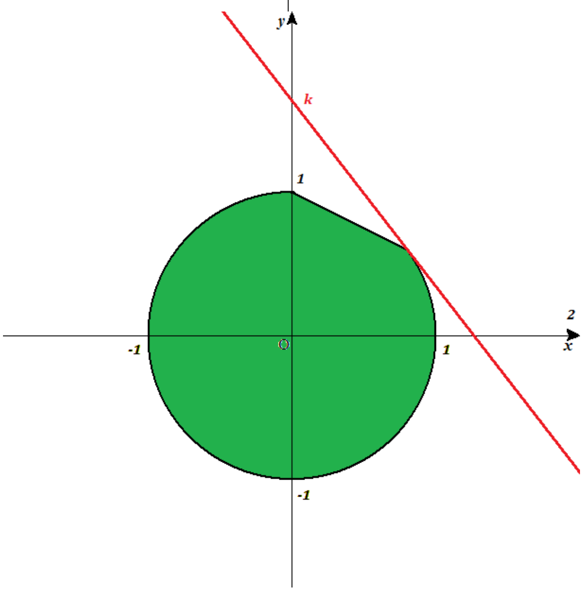
(2)と同じく、円の方程式と直線の方程式の連立方程式が**重解をもつ⇔判別式 D=0** です。さらに円の上側で接するとき、切片は正なので k>0 となります。従って(2)より$k=\sqrt{a^2+1}$



(ⅱ)直線が領域 D と点(0,1)で共有点をもつとき
(ⅰ)から直線を時計回りに転がすと、(0,1)に接したところからは**(0,1)を軸に直線が転がります**。このときの切片は常に 1 なので$k = 1$です。

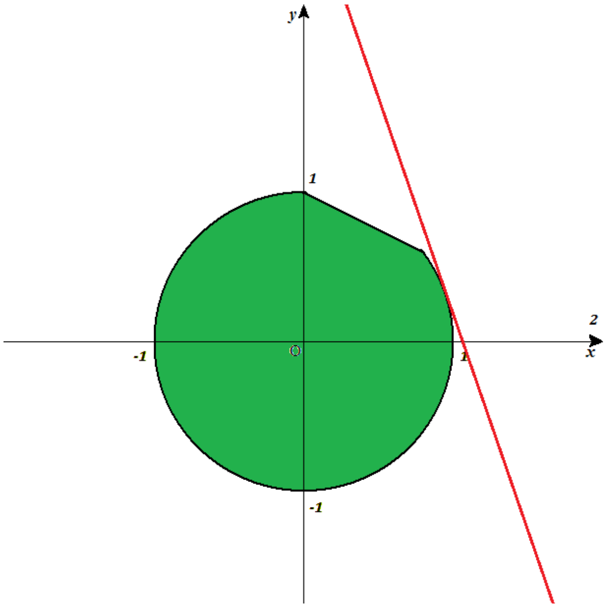


(ⅲ)直線が領域 D の直線部分と共通部分をもつとき
(ⅱ)からさらに時計回りに回転させると、領域 D の平らな部分にちょうど直線が乗っかります。このときも(ⅱ)同様に(0,1)を通っているので$k = 1$です。



(ⅳ)直線が領域 D の右側の角と共通部分をもつとき
(ⅲ)から少し直線が起き上がると、(ⅱ)と同じように領域 D の右側の角を軸に直線が回転します。この角の座標は(1)より$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$なので、この座標を直線 y=-ax+k に代入すると

$$k = \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}$$



(ⅴ)直線が領域 D と第 1 象限で接するとき
さらに回転すると(ⅰ)と同じように円の部分と接します。これも条件は円と直線が接する⇔D=0 となるので、(ⅰ)と同じく
$k=\sqrt{a^2+1}$

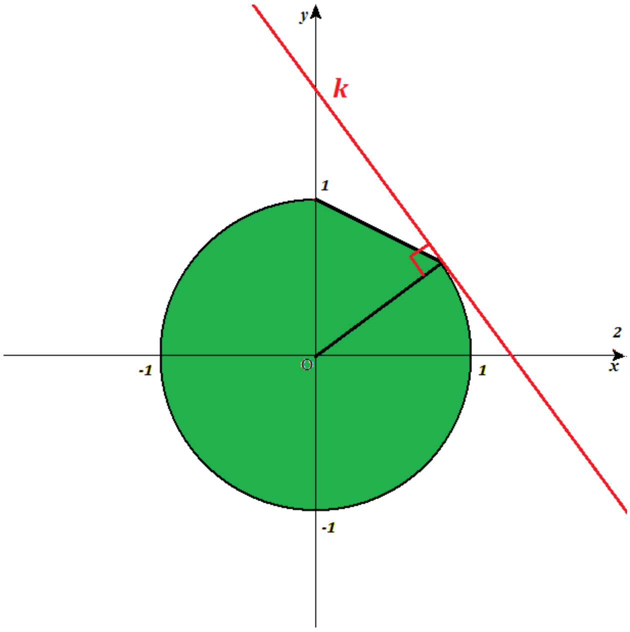
最後に(ⅰ)～(ⅴ)となる a の範囲をそれぞれ求めます。**重要となるのは各区間の境での直線 y=-ax+k の傾き**です。

(ⅰ)と(ⅱ)の境は直線 y=-ax+k が点(0,1)で接するときで、このときの直線の傾きは 0 なので a=0 のとき
このときよりも傾き-a が大きければ(ⅰ)の状態に、傾き-a が小さければ(ⅱ)の状態になります。
よって(ⅰ)となるのは$-\mathrm{a}>0 \Leftrightarrow \mathbf{a}<0$のとき

(ⅱ)と(ⅲ)、および(ⅲ)と(ⅳ)の境は直線 y=-ax+k が直線$y=-\frac{1}{2}x+1$と一致するときで、この 2 つの式を比較すると$-\mathrm{a}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

このとき(ⅲ)の状態になります。
またこのときよりも傾き-a が大きければ(ⅱ)の状態に、傾き-a が小さければ(ⅳ)の状態になります。

よって(ⅱ)となるのは$-\mathrm{a} \leqq 0$かつ$-\mathrm{a}>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{0} \leqq \mathbf{a}<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

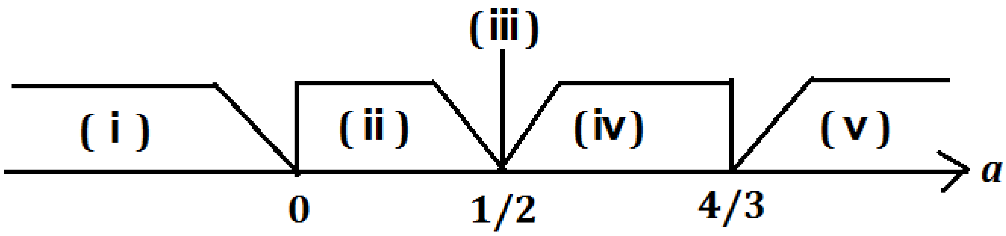


(ⅳ)と(ⅴ)の境は直線 y=-ax+k が $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$と接するときで、このときの直線の傾きは、右図の垂直関係を参考にすると$-\frac{4}{3}$なので$-a=-\frac{4}{3}$です。

このときよりも傾き-a が大きければ(ⅳ)の状態に、傾き-a が小さければ(ⅴ)の状態になります。

よって(ⅳ)となるのは$-a<-\frac{1}{2}$かつ$-a\geqq-\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<a\leqq\frac{4}{3}$

また(ⅴ)となるのは$-a<-\frac{4}{3}\Leftrightarrow a>\frac{4}{3}$



以上をまとめると各区間の a の範囲は上の数直線のようになります。
したがって k の最大値は a によって以下のようになります。なお**等号については全区間につけても構いません。**

$$
\begin{cases}
\sqrt{a^2+1} & \left(a<0, a>\frac{4}{3}\right) \quad \leftarrow (\mathrm{i}),(\mathrm{v}) \\
1 & \left(0\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right) \quad \leftarrow (\mathrm{ii}),(\mathrm{iii}) \\
\frac{4}{5}a+\frac{3}{5} & \left(\frac{1}{2}<a\leqq\frac{4}{3}\right) \quad \leftarrow (\mathrm{iv})
\end{cases}
$$