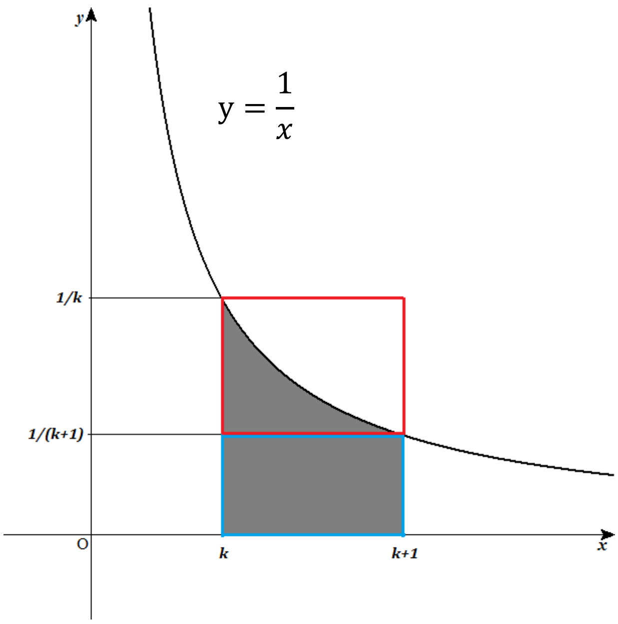
Q.(基礎問題精講数学 3 P210 例題 115)

解説の補助をお願いします。

A,

(1)「y=1/x のグラフを利用して」不等式を証明する問題です。不等式を見ると 1/x の x:k→k+1 の定積分の値の評価をしています。積分で勉強したように、定積分はグラフ上では面積にあたります。そこで**グラフの面積の大小比較によって不等式を示せばよい**ことになります。このようなグラフを利用した定積分の値の評価ではよく以下のような 2 つの長方形の面積に着目するので頭に入れておきましょう。



まず、$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$はグラフの灰色の部分にあたります。青い長方形の部分の面積は灰色全体よりも小さいですが、青い長方形と赤い長方形の面積を足すと灰色の部分より大きくなることが分かります。つまり

$$\color{blue}{\blacksquare} < \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \color{blue}{\blacksquare} + \color{red}{\blacksquare}$$

です。

$$\color{blue}{\blacksquare} = \frac{1}{k+1}\times 1 = \frac{1}{k+1}$$

$\color{blue}{\blacksquare} + \color{red}{\blacksquare} = \frac{1}{k}\times 1 = \frac{1}{k}$なので、

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{k} \qquad \text{(証明終わり)}$$

(2)

(1)とよく似た不等式ですので、(1)の不等式を変形して導き出せないかと考えます。まず(2)の第 2 辺が、(1)の第 3 辺を k:1→n-1 まで足し合わせたものであることに気付きましょう。P210 の精講にある通り、総和をとっても大小関係が保たれるので、同様に(1)の第 2 辺を k:1→n-1 まで足し合わせてみます。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

あまり見慣れない積分と総和の融合で困惑しそうですが、積分と総和の性質に従って落ち着いて操作していきます。Σ内の k に 1,2,3,…,n-1 を代入したものを足すということなので、

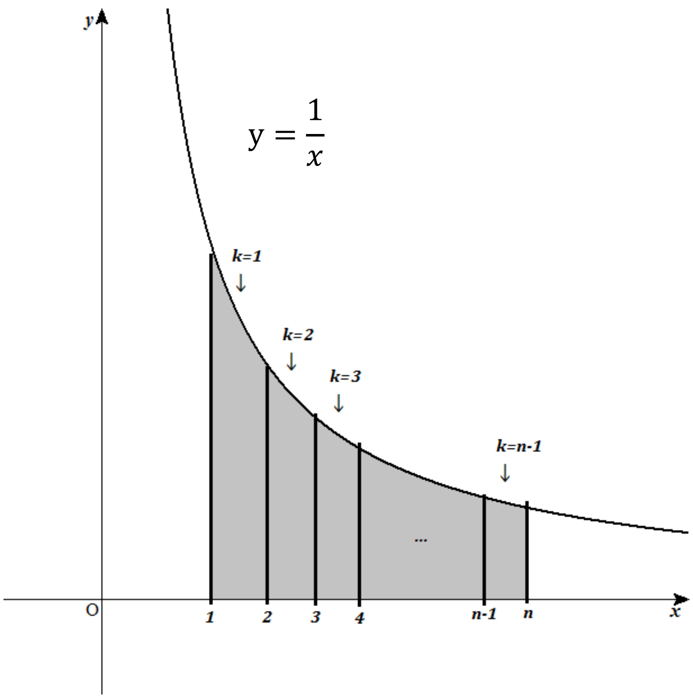
$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx \quad \leftarrow \mathrm{k}=1 \text{ を代入}$$

$$+\int_{2}^{3}\frac{1}{x}dx \quad \leftarrow \mathrm{k}=2 \text{ を代入}$$

$$+\int_{3}^{4}\frac{1}{x}dx \quad \leftarrow \mathrm{k}=3 \text{ を代入}$$

$$+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx \quad \leftarrow \mathrm{k}=\mathrm{n}-1 \text{ を代入}$$



これをグラフで表すと左のように各区間を足し合わせるという事は、結局 1/x を x:1→n まで定積分したのと同じことになります。従って

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx$$

となって、

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=[\log x]_{1}^{n}=\log n$$

となります。これは(2)の第 2 辺と同じになります。これより(1)の第 2 辺と第 3 辺について

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \log n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

となって(2)の第 1 辺と第 2 辺は示せました。あとは第 2 辺と第 3 辺をどう示すか悩みどころですが、先ほどと同様に**(1)でまだ使っていない条件である**第 1 辺と第 2 辺の総和をとります。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

この右辺は先ほど考えた通り、$\log n$になります。左辺について、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$なので、不等式は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} < \log n$$ となります。

これをどうにかして(2)の第 2 辺、第 3 辺に近づけられないか考えます。この不等式の左辺に 1 を足してあげると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} < \log n + 1$$

で、右辺が(2)の第 3 辺と等しくなりました。
左辺も

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}$$ となって

(2)の第 2 辺に 1/n 足されたものになりました。これより(1)の第 1 辺と第 2 辺の不等式は

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n} < \log n + 1$$ と変形できました。

ここで 1/n は正ですから、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}$$は明らかです。これより

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}<\log n+1$ と、(2)の第 2 辺と第 3 辺が示されました。

以上より、

$$\log n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}<\log n+1 \qquad (\text{証明終わり})$$

このように、前問でまだ使っていない条件が残っていた場合、とにかくそれを利用してみることで解答にありつけることがあります。**今使える条件と最終的に示したい式をよく比較してみましょう。**

(3)

(2)の不等式を示させてから(3)のように極限値を求めさせる流れの問題は頻出で、**はさみうちの原理を使ってほしい**という暗示です。というわけでまずは(3)に近づけるために(2)の各辺を 1/log n で割ると

$$1<\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}<1+\frac{1}{\log n}$$

第 1 辺について

$$\lim_{n\to\infty}1=1$$

第 3 辺について

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)=1$$

なので、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1$$