数学ⅡB 標準問題精講 解説

P90｜標問39

・「どんなaに対しても～」とあったら、ゼロで打ち消す【(1)に対応】

(1)は、$(a+2)x+(3a-2)y+1=0$という形の直線を表していますが、aの値によって、様々な直線になります。例えば、

$a=1$なら、$3x+\ y+1=0$という直線
$a=2$なら、$4x+4y+1=0$という直線
・・・

このように、$(a+2)x+(3a-2)y+1=0$はaの値によってさまざまな直線になる、直線群を1つの式で表しているのです。

さて、この直線群には共通点があるようです。それは、ある点を常に通るということです。
では、その点はどのように見つけたらよいのでしょうか？

解説にあるように「どの直線も・・・」というのは「どんなaにおいても・・・」という意味です。このような場合、次の関係を使います。

$Aa+B=0$ がすべてのaに対して成立する条件は、$A=B=0$

＜補足＞

「すべての人に効く」「誰でも痩せる」のようなうまい話は世の中に存在しません。
それは数学の方程式にも同じことがいえます。

$Aa+B=0$ がすべてのaに対して成立する

なんて、都合の良い方程式がこの世に存在するわけがないのです。
唯一、$A=B=0$のときだけが存在します。つまり、aがどんな値になろうとも、$A=0$でそれを打ち消すような場合だけが、この式を成立させるための条件なのです。

これを使うために、aでまとめると、

$(x+3y)a+(2x-2y+1)=0$

となります。そして、この方程式が成り立つのは、

$(x+3y)=0$
$(2x-2y+1)=0$

のときしかないのです。この2つの方程式を満たすx, yを求めれば、それこそが必ず通る定点となります。

・「2直線の交点を通る直線は、基本的に、$f(x,y)+kg(x,y)=0$ で表せる」を使ってもよい

(2)の解説では、次の定理を使っていました。

2直線の交点を通る直線は、すべて、$af(x,y)+bg(x,y)=0$で表せる（ただし、$(a,b)\neq(0,0)$）

確かに、$af(x,y)+bg(x,y)=0$としたほうが確実です。
なぜなら、「標問34」で解説したように、$f(x,y)+kg(x,y)=0$ とすると、$f(x,y)=0$を表すことができないからです。

しかし、明らかに$f(x,y)=0$ではないことがわかっているときは、その理由を言えば、「2直線の交点を通る直線を$f(x,y)+kg(x,y)=0$ とおく」としてよいです。

(i)については、
「$x+2y-5=0$は、原点（0,0）を通らない。よって、交点Pを通る直線を$f(x,y)+kg(x,y)=0$ とおくと、・・・」

(ii)については、
「$x+2y-5=0$は、直線$3x-4y+1=0$ と並行ではない。よって、交点Pを通る直線を$f(x,y)+kg(x,y)=0$ とおくと、・・・」

というように進めていけばよいのです。

しかし、こうした断りをするのが面倒くさいということなら、解答のように、

「交点Pを通る曲線を、$mf(x,y)+ng(x,y)=0$（ただし、$(m,n)\neq(0,0)$）とおいて・・・」

として進めるのがよいでしょう。