

数学III 基礎問題精講 解説

P227 | 演習問題123

ポイント

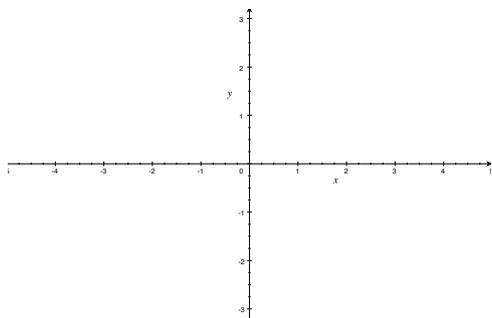
- ① 立体が出てきたら、まずは”底面の図形” ($z=0$ など) を求めてみる
- ② 続いて、”天井の図形” ($z=1$ など) を求めてみる
- ③ 最後に、”途中の図形” ($z=t$) を求めてみる
- ④ あとは、 t で積分してあげるだけで体積が求まる

解説

問題文を読んで拒否反応を起こした人も多いはず。

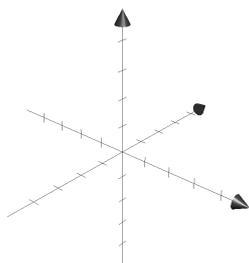
そんなときは、とりあえず $z=0$ で考えてみましょう。

実は、皆さんが今まで対象としてきた2次元 (x,y 座標) というのは、



3次元(x,y,z 座標)のうち、 $z=0$ の場合を考えていたのです。

3次元の座標系を真上から眺めた、という表現もできるでしょう。



今回は、 $0 \leq z \leq 1$ なので、まずは $z=0$ のときに x,y 平面がどうなっているかを確認してみましょう
(ポイント①)。

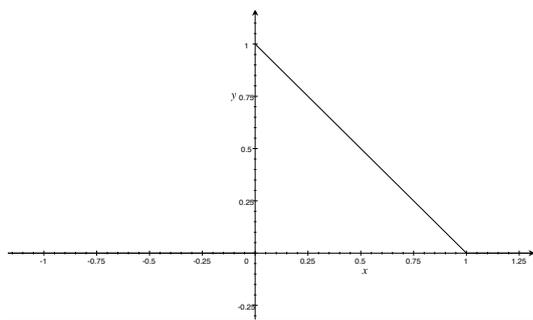
つまり、次のような与えられた条件に、

$$\begin{cases} x+y-z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$z=0$ を代入するのです。すると、

$$\begin{cases} x+y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

となります。これを x,y 座標に図示すると、次のような x,y 軸に挟まれた三角形となります。



これが、対象としている立体の”底面の図形”にあたります。

続いて、 $z=1$ の場合はどうでしょうか？ (z が最大するとき)

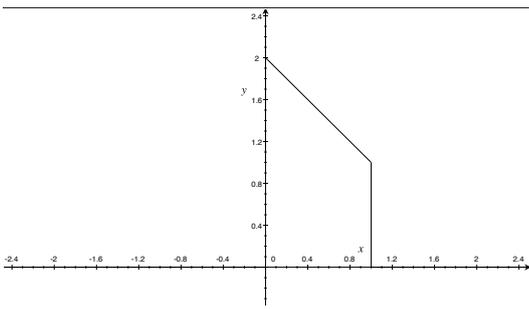
次のような与えられた条件に、

$$\begin{cases} x+y-z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$z=1$ を代入するのです。すると、

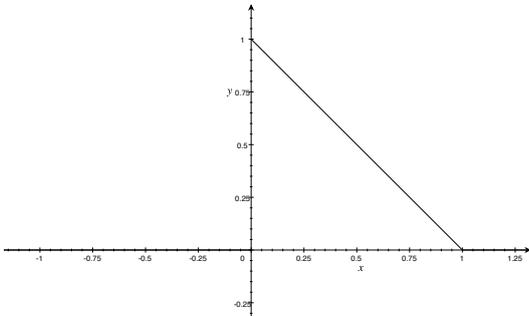
$$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

となりますね。これは、次のような図形になります (x,y軸に囲まれた図形)。

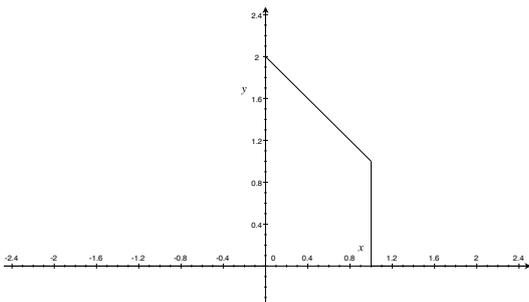


これが、最終的に求めたい立体の”天井の図形”にあたります (ポイント②)。

底面の図形がコレで、



天井の図形がコレ。



・・・そんな立体、ちょっとイメージできないですね。

でも、それでいいのです。イメージできなくても体積は求められます。

さて、 z は $0 \leq z \leq 1$ の間の値を自由に取れるので、その間ではどんな面積になっているのでしょうか？ $z=t$ のときの面積を図示してみましょう (ポイント③)。

今までと同じやり方で求められますよ。

つまり、次のような与えられた条件に、

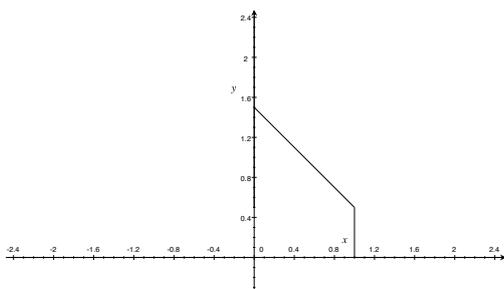
$$\begin{cases} x+y-z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$z=t$ を代入するのです。すると、

$$\begin{cases} x+y \leq 1+t \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

となります。これは、図示すると次のようになります。

(図示するときのポイントは、0~1の間の t で図示してみることです。例えば、1/2など)



あとは、この面積を t を用いて表せばいいだけです。台形の面積を求めればいいですね。

- ・上底 : t
- ・下底 : $t+1$
- ・高さ : 1

なので、面積 $S(t)$ は、「(上底+下底)×高さ÷2」より、

$$S(t) = \frac{(t+t+1) \cdot 1}{2} = \frac{2t+1}{2}$$

となります。これで(1)が求まりました。

(2)は簡単ですね。先ほど求めた $S(t)$ について、 t を0~1まで変化させて足し合わせてあげればいいので(ポイント④)、

$$\int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 \frac{2t+1}{2} dt = \dots = 1$$

となるのです（途中の計算は省略しました）。

<補足>

解答ではよく「平面 $z=t$ で切る」という表現を使いますが、いきなりこの表現が出てくると、ちょっと何やっているかがイメージしにくくなります。

慣れるまでは、今回のように（ $0 \leq z \leq 1$ だったら）、

- ・ $z=0$ を代入して”底面”の図形がどうなっているかを知り、
- ・ $z=1$ を代入して”天井”の図形がどうなっているかを知り、
- ・ $z=t$ を代入して、その途中の図形がどうなっているかを知る

という操作を行ってみると、「積分を使って立体の体積を求める」とは何をしていることなのか
がきちんと理解できると思います。

他の問題でも試してみてくださいね。