

Q.(標準問題精講 2B P134 例題 61)

解説の補助をお願いします。

A.軌跡や領域の問題は、方程式とグラフの相互関係を理解しているかどうかが問われます。

この問題ではパラメータ(α や k)を含む方程式が与えられており、パラメータに具体的な数値を代入することでひとつの直線の方程式が決まります。逆にある点が通過領域内であるかどうかは、その点に乗っかっている直線の方程式が決まるかどうか、つまりその直線が決まるようなパラメータの値が存在するかどうかによります。

そこで与えられた方程式を α や k の方程式とみなして、 α や k が実数解をもつ条件を調べることでその直線の通過する領域が分かります。

(1)

直線が通らない領域ということは、先ほどの逆で α が実数解を持たない条件を調べることとなります。まず与えられた直線の方程式を α の方程式とみなして整理します。 α の降べきの順に整理します。

$$y = 2ax - (\alpha + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2ax - \alpha^2 - 2\alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2(x-1)\alpha + y + 1 = 0$$

これで α の二次方程式とみなすことが出来ます。このとき、 α が (x ではありません!)実数解を持てば直線が決まり、そこを通過することとなります。逆に α が実数解を持たないとき、直線は通過しません。二次方程式が実数解をもたない \Leftrightarrow 判別式 $D < 0$ を思い出せるようにしましょう。

$(x, y) = (a, b)$ のとき、方程式に代入して

$$\alpha^2 - 2(a-1)\alpha + b + 1 = 0$$

このとき、 α が実数解をもたないための条件は、 α の二次方程式の判別式を D とすると

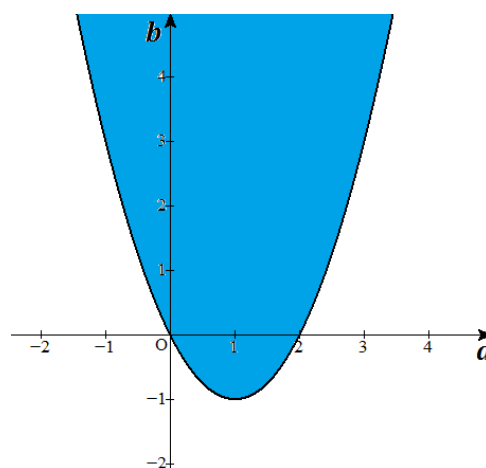
$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a-1)^2 - 4(b+1) < 0$$

これで、 α が実数解をもたないための a, b に関する条件が得られました。この領域を ab 平面に図示することを考えると、左辺が b となるように変形するのがよいです。

$$\Leftrightarrow b > (a-1)^2 - 1$$

以上より、直線の通過しない領域は右の通りです(ただし境界は含まない)。



(2)今度は k が正の実数解をもつ条件を調べればよいです。

まずは与えられた方程式を k について整理します。

$$2kx + y + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2xk + y = 0$$

この k の二次方程式が $k > 0$ の実数解をもつ条件を調べます。数学 1 で学んだ解の存在条件と同様の問題ですからこれ以降の説明が分からない場合、数学 1 の二次関数を復習しましょう。まずは k が実数解をもつ必要があるので、 k の二次方程式の判別式を D とすると

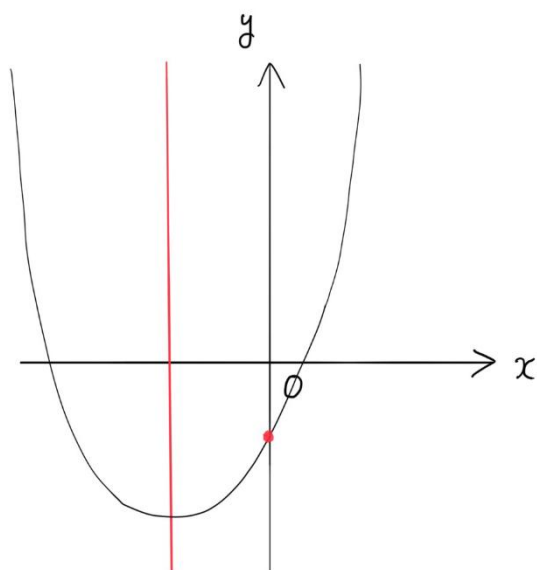
$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq x^2 \quad \text{---①}$$

次に、この k の二次関数は下に凸で、軸は $k = -x$ です。軸 ≤ 0 のときと軸 > 0 のときで場合分けが生じます。

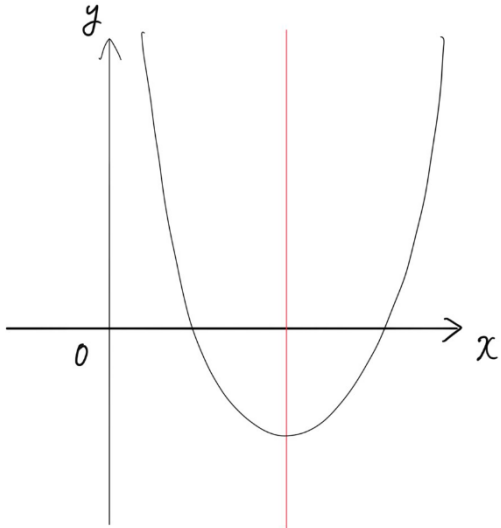
(i) 軸 $\leq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ のとき



k の二次方程式の左辺を $f(k) = k^2 + 2xk + y$ とすると、図より $k = 0$ のときに負であれば、 k が正の実数解をもつので

$$f(0) < 0 \Leftrightarrow y < 0 \quad \text{---②}$$

(ii) 軸 $> 0 \Leftrightarrow x < 0$ のとき



先ほどの判別式についての条件 $D \geq 0$ は二次関数が横軸と交わっているか接しているということです。ということは図のように必ず正の実数解を持つこととなります。

①②の条件より、

$$\begin{cases} y \leq x^2 & \text{--- ①} \\ y < 0 \quad (x \geq 0) & \text{--- ②} \end{cases}$$

この領域を図示すると右の通りです。

$x < 0$ では①のみが成り立つので境界を含みますが、 $x \geq 0$ では②も成り立つため、境界を含みません。原点は $(x, y) = (0, 0)$ であり、②を満たしていないため除外点となります。

