

数学III 基礎問題精講 解説

P55 | 演習問題32

ポイント

- ① 「 $a \leq b \leq c$ 」は「 $a \leq b$ かつ $b \leq c$ 」に言い換える
- ② 「 $|a| < |b|$ 」は「 $|a|^2 < |b|^2$ 」に言い換える

解説

まず、問題で与えられているように不等号が3つ続いている場合は、次のように2つに分けてあげることが鉄則です（ポイント①）。

$$2|z-2| \leq |z-5| \leq |z+1|$$

⇔

$$2|z-2| \leq |z-5| \quad \text{かつ} \quad |z-5| \leq |z+1|$$

では、それぞれについて見ていきましょう。

1) $2|z-2| \leq |z-5|$ について

これを満たす複素数平面上の z はどのような範囲に存在しているかを見つけるためには、 $z=a+bi$ とおき、 a と b の関係が出れば求まります。よって、 $z=a+bi$ を代入して、

$$2|a-2+bi| \leq |a-5+bi|$$

となります。ただ、このままだとこれ以上式変形できないので、ポイント②を使って、

$$(2|a-2+bi|)^2 \leq (|a-5+bi|)^2$$

⇔

$$4(x-2)^2 + 4y^2 \leq (x-5)^2 + y^2$$

⇔

$$x^2 - 2x - 3 + y^2 \leq 0$$

⇔

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 4$$

となります。

2) $|z-5| \leq |z+1|$ について

1) と同様に式変形していきます。すると、

$$(|z-5|)^2 \leq (|z+1|)^2$$

⇔

$$(x-5)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2$$

⇔

$$2 \leq x$$

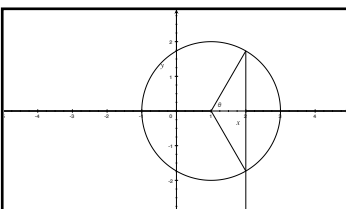
となります。1) かつ2) となるのが複素数 z の取りうる範囲なので、解答のようになります。

(2)については、(1)ができていた人はほとんどできていたので、解説しません。

(3)については、 z が範囲 D に存在しているとき、 z と x 軸との角度がもっとも大きくなるときと、もっとも小さくなるときはいつか? という問題です。

θ がもっとも大きくなるのは、次のグラフのように、 $z=2+\sqrt{3}i$ のときです。

つまり、 $\tan \theta = \sqrt{3}/2$ となります。



逆に、 θ がもっとも小さくなるのは、 $\tan(-\theta) = -\sqrt{3}/2$ のときです。

よって、 $-\sqrt{3}/2 \leq \tan \theta \leq \sqrt{3}/2$ となるのです。