Q.(基礎問題精講数学 2B P132,133 例題 80,81)
解説の補助をお願いします（「不定形を解消しないといけない」ということがよく分かりません)。

A.極限において不定形をなぜ解消しなければならないのか、例題 80 の(1)を例にして説明します。

分子も分母も、x→1 に限りなく近づけると 0 に収束することは分かると思います。まず前提として注意したいのは、これはあくまで **0 に「近い」のであり、0 に「等しい」わけではありません**。式に等号が使われているので勘違いされやすいですが、lim を用いることで便宜上「限りなく近い状態」を表しているのです。だから正確には 0 から微妙にずれた値になります。

具体的な数値で考えてみましょう。

$$\frac{0.000000001}{0.0000000001}$$

という分数を考えてみると、分子だけ、分母だけに注目してみればどちらも限りなく 0 に近いです。だからといって勝手に$\frac{0}{0}$としてはいけません。(そもそも分母=0 はタブーです)。両辺を有効数字で表すと、

$$\frac{1.0\times10^{-9}}{1.0\times10^{-10}}$$

です。分子分母を10^{10}倍すると、

$$\frac{10}{1}=10$$

となります。このように、**分子、分母それぞれだけを見ると限りなく 0 に近いですが、両者を割り算で比較すると 10 倍も違う**ということになります。別な言い方をすれば、分母の方が分子の 1/10 倍であり､分母の方がより 0 に近かったということになります。この場合は両辺を10^{10}倍したことで不定形状態が解消されたといえます。

これと同じことを文字式でも行います。
(1)では x→1 のとき$x^2-1\to0$、$x-1\to0$と、与式は「不定形」となります。先ほど説明した通り、分子の「0」と分母の「0」はどちらも全く同じ数値ではありません。**分子分母に何かかけたり割ったりして不定形を解消**してあげれば具体的な収束値が分かり

ます。
そこで分子を因数分解してみると$x^2-1=(x-1)(x+1)$となり、分子分母を$x-1$で割れば分子が$x+1$、分母は 1 となります。あとは$\frac{x+1}{1}$が何の値に近づくか考えればよく、これは 2 に収束すると簡単に分かります。

※分子分母がともに∞になるときも同じです。**∞とは「数が非常に大きい『状態』」を表しており、具体的な数値を表しているわけではありません**から、∞/∞=1 とはなりません。例えば x と 3x は x→∞のときいずれも∞に発散しますが、明らかに 3x の方が x よりも大きくなるはずですので、∞/∞=1 とならないことが感覚的に分かると思います。
これも分子分母に何かかけたり割ったりして不定形を解消し、具体的な収束値を求めます。

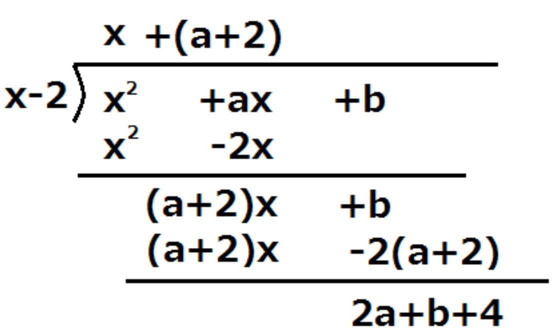
例題 81 では未知数 a,b を含む分数を x→2 に近づけたときに 6 に収束するという設定です。x→2 のとき、分子は 4+2a+b=2a+b+4 に、分母は 0 に限りなく近づきます。このとき分子が 0 以外だとすると、

$$\frac{2a+b+4}{0\text{に限りなく近い数}}$$

となるため非常に大きな値、つまり∞に発散してしまうため、6 に収束しません。それを防ぐためには、**自分で不定形を作ってあげること**です。そうすればどこかの値に収束する**可能性**が出てきます。
よって**分子も x→2 のとき 0 に収束する必要があります**。つまり

$$2a+b+4=0 \quad —①$$

が a,b の満たすべき 1 つ目の条件です。



いま、上の条件を満たすとすると、0/0 の不定形となります。これを解消するには例題 80 でもあったように**分子が分母で割り切れる必要があります**。そこで実際にx^2+ax+bを$x-2$で割ってみると左のようになります。

$① \Leftrightarrow 2\mathrm{a}+\mathrm{b}+4=0$だったので、$\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{b}=(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+\mathrm{a}+2)$と因数分解できます。

これより

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 2}\frac{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+\mathrm{a}+2)}{\mathrm{x}-2}=\lim_{x\to 2}(\mathrm{x}+\mathrm{a}+2)$$

となります。これが 6 に収束すれば良いので、

$$2+\mathrm{a}+2=6$$

よって①の条件も合わせると$\mathrm{a}=2, \mathrm{b}=-8$となります。

ただし、ここで終わってはいけません。不定形を作れば収束する**「可能性がある」**と言った通り、いま求めたのはあくまで**必要条件**です。本当に 6 に収束するかどうかは、実際に$\mathrm{a}=2, \mathrm{b}=-8$を代入して確かめなければなりません(**十分性の確認**)。

逆に$\mathrm{a}=2, \mathrm{b}=-8$のとき、与式に代入すると

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+4)=6$$

となって十分性が確認できました。以上より解答は$\mathrm{a}=2, \mathrm{b}=-8$