

# 数学III 基礎問題精講 解説

P89 | 演習問題50

## ポイント

- ① 左辺の分母が0に収束、右辺も収束。なら、左辺の分子も0に収束するのが必要条件
- ② ①で求められた式を代入し、因数分解する。その際、因数定理を使うとラク

## 解説

左辺の分母が0に収束していますね。基本的に、分母が0になると発散してしまいます。

例えば、分子=1だとすると、

$$\frac{1}{0} = \infty$$

となるように。しかし、与えられた式は、右辺が定数に収束していますね。となると、可能性があるのはただ一つ、分子も0に収束する場合です（ポイント①）。分子が0に収束すれば、

$$\frac{0}{0} = ?$$

というように、不定形になるのです。例えば、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

も不定形ですが（分母も分子もともに0に収束）、これは次のように収束しますね。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

他にも、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}$$

は不定形ですが（分母も分子もともに0に収束）、次のように収束します。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

（しかし、不定形だったとしても、必ず収束するとは限りません）

・・・ということなので、左辺の分子について、

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(\theta) = 0$$

が成り立つことが必要条件です。

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} a \cos^3 \theta + b \cos^2 \theta - 12 \cos \theta + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cos^3 \frac{\pi}{3} + b \cos^2 \frac{\pi}{3} - 12 \cos \frac{\pi}{3} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left( \frac{1}{2} \right)^3 + b \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 12 \left( \frac{1}{2} \right) + 5 = 0$$

$$\therefore a = 8 - 2b$$

こうして求めた条件は、元の式

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{a \cos^3 \theta + b \cos^2 \theta - 12 \cos \theta + 5}{\theta - \frac{\pi}{3}}$$

に代入します。

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(8 - 2b) \cos^3 \theta + b \cos^2 \theta - 12 \cos \theta + 5}{\theta - \frac{\pi}{3}}$$

こうして出てきた分子は、基本的に因数分解できます。しかし、パッと見ただけでは、どのように因数分解できるかわかりませんよね。

ここで思い出していただきたいのは、そもそも必要条件というのは、

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(\theta) = 0$$

が成り立つような条件だったということです。つまり、 $f(\theta)$ は

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

を解に持つのです。ただ、 $f(\theta)$ の中に $\theta$ がむき出しの状態では存在していません。 $\cos \theta$ として存在しているのです。ということは、

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

を解に持つのではなく、

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

を解に持つのだと考えると、因数定理から、

$$f(\theta) = (2\theta - 1)g(\theta)$$

という形になるということを予想することができます（ポイント②）。実際に、

$$f(\theta) = (2\cos \theta - 1)\{(4 - b)\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 5\}$$

と因数分解できます。ここまできたら、あとは、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{3}} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2\cos \theta - 1)\{(4 - b)\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 5\}}{\theta - \frac{\pi}{3}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{3}} \cdot \{(4 - b)\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 5\} \end{aligned}$$

というように、不定形（第1項）と、それ以外（第2項）に分けましょう。

第1項は、解答のように計算することで、

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$$

となります。一方、第2項は、単純に代入をして、

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} (4 - b)\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 5 = (4 - b) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{-12 - b}{4}$$

となります。ということで、

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{3}} \cdot \{(4-b)\cos^2\theta + 2\cos\theta - 5\} \\ &= -\sqrt{3} \cdot \frac{-12-b}{4} \end{aligned}$$

となります。これを元の式である、

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}$$

に代入すると、 $a=8$ ,  $b=0$ となるのです。