数学Ⅲ 基礎問題精講 解説

P116｜必修基礎問65

・xで微分する

まず、xで微分するという操作は、

$\frac{d}{dx}$ または右肩に「'」をつけて表現します。

例えば、 x^2 をxで微分することは

$\frac{d}{dx}x^2$ または $\left(x^2\right)'$

と表されますし、2x+1をxで微分することは

$\frac{d}{dx}(2x+1)$ または $(2x+1)'$

と表されます。

・xの関数を、xで微分する

先ほどのように、xの関数をxで微分するときは、すでに知っている微分をすればよいのです。つまり、

$\frac{d}{dx}x^2=2x$ または $\left(x^2\right)'=2x$

$\frac{d}{dx}(2x+1)=2$ または $(2x+1)'=2$

となります。

・yを、xで微分する

では、yをxで微分したらどうなるでしょうか？　yはxの関数ですが、ここで言いたいのは「xではない文字をxで微分したらどうなるか？」です。

まず「xで微分する」ということには変わりないので、

$\frac{d}{dx}y$ または y' $\frac{d}{dx}y$

と表現できます。ただ、は慣習的に

$$\frac{dy}{dx}$$

と表現することが多いです。よって、yをxで微分するということは、

$\frac{dy}{dx}$　または　y'

と表現できます。ここでは、

$\frac{dy}{dx} = y'$　・・・（★）

ということを頭に入れておいてください。ただの表現の違いでしかありませんが。

・yの関数を、xで微分する

では、これまでの知識をフル活用して「yの関数を、xで微分したらどうなるか？」について考えてみましょう。例えば、

y^2　をxで微分する

というのは、どうしたらよいでしょうか？　まず、「xで微分する」は

$$\frac{d}{dx}$$

で表現されるのは変わりないので、

$$\frac{d}{dx}y^2$$

となりますね？　しかし、これで終わりにしてはいけません。これではただ「日本語を数式に置き換えただけ」ですので。

では、どうしたらよいかというと、合成関数の微分の考え方を用います。
（yはxの関数なので。例えば、y=sin(1+logx)のような）

しかし、理屈を説明するよりも、次のように感覚的に覚えてしまった方が早いです。

「yをxで微分することはできないから、かわりにyで微分してしまおう。さすがにそれで終わりにするのはまずいので、yをxで微分してしまおう」・・・つまり、

$$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}$$

と変換することができるのです（なぜこのようになるかは、下の合成関数の微分についてを読んでみてください）。すると、

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}y^2$$

となります。あとは、

$$\frac{dy}{dx}=y' \quad ・・・（★）$$

$$\frac{d}{dy}y^2=2y$$

を代入して、

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}y^2=y'\cdot 2y$$

となるのです。

＊＊＊

・補足： $\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}$ **となる理由　～合成関数の公式を使った説明～**

合成関数の微分については「基礎問62」で説明しましたが、次の3つのステップからなります。

合成関数の微分：①外の関数を微分　→　②中の関数を入れる　→　③中の関数の微分をかける

さて、今回の「yの関数をxで微分する」ではどうなるかというと、sin(1+logx)を例にすると、
「外の関数」はsinx、「中の関数」は1+logxを指す、と説明しました。

しかし、実は厳密にいうと、「中の関数」をy=1+logxとおいて、「外の関数」をsinyと考えるのが正しい表現だったのです（こういうと混乱すると思ったので、合成関数の微分では「外の関数」をsinxとしていました）

これを踏まえ、合成関数の公式を言い換えると、

合成関数の微分：①外の関数をyで微分 → ②中の関数を入れる → ③yをxで微分したものをかける

となります。よって、これを記号で表すと、

$$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}$$

となるのです。ちなみに、「②中の関数を入れる」というステップはどこにいったの？　と思うかもしれませんが、yこそが中の関数なので、yを使っていればOKです。

＊＊＊

・yをxで微分すると　$\frac{dy}{dx}$　となり、もう一度xで微分すると　$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$　となるが・・・

さて、yをxで微分することを

$$\frac{dy}{dx}$$

と表記することはもうおわかりだと思いますが、これをもう一度xで微分することは、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

と表記できます。ただ、これをもうちょっとカッコよく表現しようと数学者は考え、

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

と書くことがあります。この表記方法のメリットは、yをxで2回微分していることが一目でわかることです。・・・とにかく、ここでお伝えしたいことは、

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

というのが問題文で出てきたら、それは

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

と変形するということです。・・・（★★）

・yの関数をxで微分　→　$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}$　を使おう！【精講（例）に対応】

（例）(i)(iii)について。

この2つはともに、yの関数をxで微分しています。なぜなら、

$\frac{d}{dx}$　は「xで微分すること」を意味する記号ですので、

$\frac{d}{dx}y^2$　や　$\frac{d}{dx}\sqrt{y}$

というのは、それぞれ「yの関数をxで微分する」ということを意味しています。
このままでは計算を進められないので、

$$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}$$

と変換するのでしたね。ということで、それぞれ解説にあるような式変形になるのです。

（例）(ii)(iv)について

(ii)(iv)は「xとyが混じった関数」をxで微分する問題ですが、今までとやることは変わりません。

(ii)は「積の微分」なので、まずは

$$\frac{d}{dx}xy=\left(\frac{d}{dx}x\right)\cdot y+x\cdot\left(\frac{d}{dx}y\right)$$

と変形できます。（なぜこうなるかわからない人は、基礎問題精講P106「基礎問60」に戻ってください）。
あとは、

$$\frac{d}{dx}x=1$$

$$\frac{d}{dx}y=y'$$

となることから、代入して

$$\frac{d}{dx}xy=\left(\frac{d}{dx}x\right)\cdot y+x\cdot\left(\frac{d}{dx}y\right)=y+xy'$$

となるのです。

(iv)は、「商の積分」なので、まずは

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\left(\frac{d}{dx}y\right)\cdot x-y\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}$$

と式変形できます（なぜこうなるかわからない人は、基礎問題精講P106「基礎問60」に戻ってください）。
あとは、

$$\frac{d}{dx}x=1$$

$$\frac{d}{dx}y=y'$$

から、代入して、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\left(\frac{d}{dx}y\right)\cdot x-y\cdot\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2}=\frac{xy'-y}{x^2}$$

となるのです。

・2回微分では、1回微分の結果を使う【(2)に対応】

（★★）で説明したように、

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

というのは、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

と式変形できます。あとは、(1)から

$$\frac{dy}{dx}$$

が出ているので、これを代入して計算します。