数学III 基礎問題精講 解説

P148｜必修基礎問81

・(1)の誘導をそのまま使ってもいい【(2)に対応】

(1)は(2)を解くためのヒント問題です。

(1)　$e^x > \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

なので、(2)では(1)の結果を用います。

$$f(x) < \frac{x}{e^x} < g(x)$$

を満たすf(x), g(x)において、

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

となることを示せばいいのです。ラッキーなことに、今回は左辺については

$$0 < \frac{x}{e^x} < g(x)$$

が言えているので、あとは、

$$\frac{x}{e^x} < g(x) \quad ・・・（★）$$

を満たすg(x)を見つけたらよさそうですね。

(1)の式の形と照らし合わせて、この（★）の形にすることができないかと考えます。

まずは　$\dfrac{x}{e^x} < g(x)$　の形に持っていくように、を　$e^x > \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$　変形していきます。

$$e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^x} < \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$$

両辺にx（>0）をかけて、

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$$

右辺を計算して

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x} < \frac{1}{\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}}$$

となります。このとき、

$$g(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}}$$

とすると、

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\infty + 1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\infty + 1 + 0} = 0$$

となるので、はさみうちの原理から、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

となります。このように、(1)の誘導をそのまま使っても証明することができます。
しかし、これではちょっと煩雑なので、スマートに証明したのが「解説」で紹介されているものです。

(1)の不等式を、次のように変形します。

$$e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1 > \frac{1}{2}x^2 \qquad \therefore e^x > \frac{1}{2}x^2$$

分母分子を逆転させると

$$\frac{1}{e^x} < \frac{2}{x^2}$$

両辺にx（>0）をかけて、

$$\frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}$$

よって、 $g(x) = \frac{2}{x}$ とおくと、

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

となります。こちらの方がすっきりしているので、「解答」ではこちらの解法をとっているのですが、別に(1)の誘導をそのまま使って証明することもできます。