数学ⅡB 標準問題精講 解説

P12｜標問2

・多項定理：多項式のn乗を展開するとどうなる？

多項定理を確認しましょう。まずは具体例として、 $(a+b+c)^4$ を展開してみます。

$$(a+b+c)^4=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

右辺を展開すると、4個の括弧の中からa, b, cから1つずつとっていくことになり、

$$a^4, a^3b, a^3c, a^2b^2, a^2b\ c, a^2c^2, ab^3, ab^2c, abc^2, ac^3, b^4, b^3c, b^2c^2, bc^3, c^4$$

といった項が現れます。それぞれの項ができる数が、それぞれの項の係数になります。

さて、 abc^2 に注目しましょう。

この項は、右辺の4個の括弧から、aを1つ、bを1つ、cを2つ選んだときに作られる項で、次の12通りあります。

$$a\cdot b\cdot c\cdot c=abc^2$$
$$a\cdot c\cdot b\cdot c=abc^2$$
$$a\cdot c\cdot c\cdot b=abc^2$$
$$b\cdot a\cdot c\cdot c=abc^2$$
$$b\cdot c\cdot a\cdot c=abc^2$$
$$b\cdot c\cdot c\cdot a=abc^2$$
$$c\cdot a\cdot b\cdot c=abc^2$$
$$c\cdot a\cdot c\cdot b=abc^2$$
$$c\cdot b\cdot a\cdot c=abc^2$$
$$c\cdot b\cdot c\cdot a=abc^2$$
$$c\cdot c\cdot a\cdot b=abc^2$$
$$c\cdot c\cdot b\cdot a=abc^2$$

これ何種類あるかというと、○○○○の中にa, b, c, cを入れていく場合の数だけあるので、4×3×2×1 = 4!通り

・・・としたくなります。しかし、これでは、2つのcを区別して数え上げていますね。

例えば、 $a\cdot b\cdot c\cdot c$ は1つとして数えなければならないのに、

$$a\cdot b\cdot c_1\cdot c_2$$
$$a\cdot b\cdot c_2\cdot c_1$$

の2通りを数えてしまっているのです。

＜補足＞

もし○○○○の中に、a, b, c, dを入れていく数え方なら、4×3×2×1 = 4! 通りで正しいです。

よって、多く数えてしまっている分を除かなくてはなりません。
それは、2つの文字の並べ方（2!）なので、

$$\frac{4!}{2!}$$

とすればいいですね。これを一般的に考えると、

$$(a+b+c)^n=(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)$$

の、とある項 $a^pb^qc^r$ の係数は、

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

となるのです。よって、一般項は、

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

となります。

そして、p+q+r=nという状態を満たした中で、p,q,rをいろいろな数字に変えたものを足し合わせたのが展開式となるので、次のような表記になっているのです。

$$(a+b+c)^n=\sum_{p+q+r=n}\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$