

Q. (基礎問題精講 2B P93 演習 57)

$\frac{3\theta+(\pi+2\theta)}{2}$ になる過程と、解に至るまでの解説をお願いします。

A.

$$\sin 3\theta = \sin(\pi + 2\theta) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

から

$$\frac{3\theta+(\pi+2\theta)}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が導かれる過程について説明致します。

まず①は、単位円上で角 3θ の位置と角 $(\pi + 2\theta)$ の位置の y 座標が等しいことを表しています。

よって、これら2つの角の位置関係としては、次の2つの可能性が考えられます。

(i) 3θ と $(\pi + 2\theta)$ は単位円上で完全に同じ位置にある

(ii) 3θ と $(\pi + 2\theta)$ は y 軸に関して線対称な位置にある

(i)であるような場合は、

$$3\theta = (\pi + 2\theta) + 2\pi n \quad (n: \text{整数})$$

$$\therefore \theta = \pi + 2\pi n$$

をみたす必要がありますが、 θ のとりうる範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ですので、上式を満たす θ は存在せず、(i)の可能性は無視して良いこととなります。

(ii)であるような場合は、解答の単位円の図にも記載されている通り、2つの角を足して2で割った平均の角が、必ず y 軸上に来ることが分かりますので、②の式が成立することが分かります。

あとは②式を整理することで

$$\frac{5}{2}\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\frac{5}{2}\theta = n\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{2n\pi}{5}$$

となりますので、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす θ の値を調べると、

$$\theta = 0, \frac{2\pi}{5}$$

となることが分かるのではないかと思います。