

数学Ⅲ 基礎問題精講 解説

P142 | 必修基礎問78

・「グラフの概形」と言われたら、凹凸、漸近線、グラフの端の傾きまで調べるのが暗黙の了解

グラフの最大値や最小値を求めよ、という問題が出た場合は、

- ・増減
- ・極値

を求めればよいのですが、もしも「グラフの概形をかけ」と言われたら、

- ・増減
- ・極値
- ・凹凸
- ・漸近線
- ・グラフの端の傾き

まで求めることが、暗黙の了解となっています。「基礎問78」の問題文にはきちんと「増減、極値、凹凸、変曲点、漸近線を調べて」と書いてありますが、今後はこう書かれていなくても求めるようにしましょう。

<補足>

.....
「精講」には「③座標軸との交点」も必要とありますが、これはどちらかという優先順位は低いです（ただ $x=0$, $y=0$ を代入したらいいだけなので）。
.....

では、それぞれについて簡単に解説していきます。

1) 増減

増減表はさすがに書けますよね？ ここは省略します。

2) 極値

増減表のうち、 $y'=0$ となる値を求め、もっとも大きい値が極大値、もっとも小さい値が極小値です。

3) 凹凸

まずは y'' を計算し、+になる範囲と-になる範囲を特定します。すると、


	①	②	③	④
y'	+	+	-	-
y''	+	-	+	+

という、①～④の4つの組み合わせが出てきます。これを元に、 y の凹凸を求めます。それぞれについて見ていきましょう。

①のとき


これは何を意味しているかというと、

- ・ y' が+なので、上向きということがわかります（↗）
- ・ y'' が+ですが、これは「傾きがどんどん大きくなる」ということを示しています。

よって、 y は  という形になります。


②のとき

- ・ y' が+なので、上向きということがわかります（↗）
- ・ y'' が-ですが、これは「傾きがどんどん小さくなる」ということを示しています。

よって、 y は  という形になります。


③のとき

- ・ y' が-なので、下向きということがわかります（↘）
- ・ y'' が+ですが、これは「傾きがどんどん大きくなる」ということを示しています。
（最初の傾きは大きくマイナスだが、どんどん大きくなり、0に近づく）

よって、 y は  という形になります。

④のとき

- ・ y' が-なので、下向きということがわかります（↘）
- ・ y'' が+ですが、これは「傾きがどんどん小さくなる」ということを示しています。
（最初の傾きは小さくマイナスだが、どんどん小さくなり、大きなマイナスになる）

よって、 y は  という形になります。

4) 漸近線

漸近線については「基礎問77」の解説で触れたので、わからなかった人はそちらを参照してください。

5) グラフの端の傾き

「グラフの端」というのはどこのことでしょうか？ それは、漸近線の時と同様に、

- ① 不連続点
- ② $x \rightarrow \infty$
- ③ $x \rightarrow -\infty$

や、今回の「基礎問78」のように、定義域 $0 < x$ における、 $x=0$ のことです。

今回の問題では「グラフの端の傾き」は求められませんでした。後に求められることがあるので、調べる前提でいましょう。

グラフの端の傾きの求め方は、 y' の極限值を求めればよいのです。例えば、今回の問題では

$$y' = \frac{1-x}{e^x}$$

で、グラフの端は $x \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow -\infty$ だけです。

よって、次の計算をすることで、グラフの端の傾きが求められます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{e^x} = \infty$$