Q.(標準問題精講　数 1A　例題 52)
解説の補助をお願いします。

A.
（三角形がどんな形であるのかを決めるのは、辺の長さと角度です。$\cos A = 0$ のように数字がわかれば$\mathrm{A} = 90^\circ$などと角度も決まるのですが、与式のような文字式だと具体的な数字は出せないと予想できます。一方、cos は余弦定理を使って辺の長さで表せ、また、sin も正弦定理を使って三角形の外接円の半径 R と辺の長さで表せるので、与式を辺の長さ a,b,c を使って変形すればよいのでは、と考えます。）

(1)余弦定理、正弦定理を使って$\cos A$、$\sin B$、$\sin C$を a,b,c で表し、与式に代入します。
式を整理すると、$a^2 = b^2$となり、$\mathrm{a} > 0$かつ$\mathrm{b} > 0$なので、$\mathrm{a} = \mathrm{b}$
これより、BC＝CA の二等辺三角形　になります。

(2)余弦定理、正弦定理を使って与式を a,b,c で表し、整理すると、$a^4 = b^4 + c^4 - 2b^2c^2$…①になります。これより、$a^4 = (b^2 - c^2)^2$となります。(①式の右辺を見て因数分解ができるということには、すぐに気が付いてほしいです。)
$a^4 - (b^2 - c^2)^2 = (a^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 = \{a^2 - (b^2 - c^2)\}\{a^2 + (b^2 - c^2)\} = 0$ なので、
$a^2 - (b^2 - c^2) = 0$または$a^2 + (b^2 - c^2) = 0$である。
これと三平方の定理より、$\angle\mathrm{B} = 90^\circ$または$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$の直角三角形になります。

(3)同様にして a,b,c を使って与式を整理すると、$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0$…②になります。
これより、$\frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\} = \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0$ と変形できます。(②からこの式変形をすることは難しく思えますが、よく出るやり方なので覚えたほうがいいと思います。)
これより、$\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}$、すなわち正三角形になります。