Q.(数学 2B　標準問題精講　p.58~59 例題 24)
場合分けがややこしいです。

A.
(1)では 2 次方程式の解の場合分けが、異なる 2 つの正の解、異なる 2 つの負の解、正負 1 つずつの解の 3 つであることはわかると思います。
それぞれの判別式の符号、2 次方程式の 2 解α,βの和・積の符号を場合分けするのは簡単ですが、場合分けをしてからの式変形が問題集では短縮されているのでわかりづらくなっています。少し細かく書いていきます。

(ⅰ)異なる 2 つの正の解をもつ

$\frac{D}{4} > 0, \alpha+\beta > 0, \alpha\beta > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k-2)}{2} < 0, \frac{k+2}{k} > 0 \cdots ①, \frac{3k+2}{k} > 0 \cdots ②$

$\Leftrightarrow -1 < k < 2$, ①は k>0 のとき k>0 で、k<0 のとき k<−2

②は k>0 のとき k>0 で、k<0 のとき$k < -\frac{2}{3}$

∴　$0 < k < 2$

まだ場合分けからの式変形に慣れていないときは、このように k が 0 より大きいか小さいかで場合分けするとわかりやすくなります。残りの 2 つも同様の方法で式変形を行えばよいです。

(2)では、4 次方程式の実数解を考えるのは大変なので $t^2 = u$とおき、与式を u の 2 次方程式としてみると解きやすくなります。
ここで実数解の条件の変形に気をつけなければなりません。
本問では与式が少なくとも 1 つの実数解をもつとあり、t が正負のどちらでも$t^2 = u \geqq 0$であるので、$u^2 + xu + y = 0$は少なくとも 1 つ 0 以上の実数解をもつと言い換えることができます。
つまり、実数解の条件は「2 解が共に正である」または「解 0 をもつ」または「負の解と正の解をもつ」になります。
条件さえわかれば(1)の場合分けとあまり変わりはないので、答えを導き出せると思います。

2 次方程式の解の配置を場合分けし条件を考えるときは、判別式の符号,2 次方程式の 2 解の和・積の符号を意識するようにしてみてください。