Q.(標準問題精講数学 2B P42 例題 16)
解説の補助をお願いします。

A.相加平均・相乗平均の関係は 2 文字の場合がよく知られていますが、3 文字以上でも成り立ちます。この問題は 3 文字での相加平均・相乗平均の証明とそれを利用する問題です。

最初は不等式の証明です。不等式の証明は(大きい方の辺)-(小さい方の辺)≧0 とするのが最もオーソドックスな方法ですが、これを示すためには**正の数の積や 2 乗の形を作る**ことがポイントです。数学 2 で学んだ因数分解の公式をうまく使いましょう。
左辺は a のみで、右辺は b のみで書かれているので一旦左辺を全て b で表しましょう。

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{b_1^3+b_2^3+b_3^3}{3}-\sqrt[3]{b_1^3b_2^3b_3^3}$$

$$=\frac{b_1^3+b_2^3+b_3^3}{3}-b_1b_2b_3$$

$$=\frac{1}{3}(b_1^3+b_2^3+b_3^3-3b_1b_2b_3)$$

ここで数学 2 の因数分解の公式を適用します。

$$=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1)\quad —(*)$$

ここで$b_1+b_2+b_3>0$なので$\boldsymbol{b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1}$**が 0 以上になることが分かれば OK** です。2 乗の形を作りましょう。

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1$$

$$=\left(\frac{1}{2}b_1^2-b_1b_2+\frac{1}{2}b_2^2\right)+\left(\frac{1}{2}b_2^2-b_2b_3+\frac{1}{2}b_3^2\right)+\left(\frac{1}{2}b_3^2-b_3b_1+\frac{1}{2}b_1^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(b_1-b_2)^2+\frac{1}{2}(b_2-b_3)^2+\frac{1}{2}(b_3-b_1)^2$$

$$=\frac{1}{2}\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

※この変形はよく出てくるので頭に入れておきましょう。

これより

$$(*)=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)\times\frac{1}{2}\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

$$=\frac{1}{6}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

$(b_1-b_2)^2\geqq 0,(b_2-b_3)^2\geqq 0,(b_3-b_1)^2\geqq 0$なので、
$(*)\geqq 0$
また、等号成立は$(b_1-b_2)^2=0,(b_2-b_3)^2=0,(b_3-b_1)^2=0$
のときなので$b_1=b_2=b_3\Leftrightarrow\sqrt[3]{a_1}=\sqrt[3]{a_2}=\sqrt[3]{a_3}\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3$のときです。

次は相加平均・相乗平均を利用して不等式を証明します。a_1,a_2,a_3に何を入れるかが分かればすぐに証明出来ますが、問題の式のままでは分かりにくいです。そこで問題の式の空欄をxとして**問題の式を相加平均・相乗平均の不等式に近づけるよう変形**していきましょう。

$$4(a^2+ab)^3\geqq 3^3(a^2b)^x\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(a^2+ab)^3}{3^3}\geqq\frac{(a^2b)^x}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+ab}{3}\geqq\sqrt[3]{\frac{(a^2b)^x}{4}}\quad—(@)$$

これと相加平均・相乗平均の不等式を比較してみます。左辺には項が 3 つ必要であるのに 2 つしかありません。また右辺には 1/4 がついており、これも考慮してあげる必要があります。そこで**左辺の項のひとつを 1/2 ずつに分けて項をもう一つ増やすことを考えます。そうすれば 1/2×1/2=1/4 となって右辺の 1/4 とも整合性が取れそうです。**

まず$a^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2$に分けて考えてみましょう。

$$(@)\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+ab}{3}\geqq\sqrt[3]{\frac{(a^2b)^x}{4}}$$

左辺の 3 つの項をかけると

$$\frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2}a^2 \times ab = \frac{a^5 b}{4}$$

となって、右辺の 1/4 は合いましたが文字の次数が合わなさそうです。

今度は$ab = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$として考えてみましょう。

$$(@) \Leftrightarrow \frac{a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{(a^2 b)^x}{4}}$$

左辺の 3 つの項をかけると

$$a^2 \times \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ab = \frac{a^4 b^2}{4} = \frac{(a^2 b)^2}{4}$$

となって、$x = 2$とすれば右辺と一致します。

よって$\boldsymbol{a^2, \frac{1}{2}ab, \frac{1}{2}ab}$**(全て正)で相加平均・相乗平均をとると**

$$\frac{a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab}{3} \geqq \sqrt[3]{a^2 \times \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ab} \Leftrightarrow \frac{a^2 + ab}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{(a^2 b)^2}{4}}$$

両辺を 3 乗して

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + ab}{3}\right)^3 \geqq \frac{(a^2 b)^2}{4}$$

両辺に$3^3 \times 4$をかけて

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + ab)^3 \geqq 3^3 (a^2 b)^2$$

次に、この不等式を用いて円柱の体積について考えます。底面が半径 a,高さが b の円柱の体積は$V = \pi a^2 b$

またこの円柱の表面積は$S(\text{一定}) = 2\pi \mathrm{a}^2 + 2\pi ab = 2\pi(a^2 + ab)$

これを先ほど示した不等式と見比べると V は右辺の一部と一致し、S も左辺の一部と一致します。不等式の a,b を V と S で表すと

$$a^2 b = \frac{V}{\pi} \quad , \quad a^2 + ab = \frac{S}{2\pi}$$

これを不等式に代入すると、

$$4\left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 \geqq 3^3\left(\frac{V}{\pi}\right)^2$$

これをVについて変形します。

$$V^2 \leqq \frac{\pi^2}{3^3}\times 4\left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 = \frac{\pi^2}{3^3}\times 4\times\frac{S^3}{8\pi^3} = \frac{S^3}{2\times 3^3\pi}$$

$$\Leftrightarrow V \leqq \sqrt{\frac{S^3}{2\times 3^3\pi}}$$

Sは一定なので、この不等式の等号が成り立つときVは最大となります。等号成立は$a_1 = a_2 = a_3$すなわち$a^2 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab$のときなので、

$$a^2 = \frac{1}{2}ab \Leftrightarrow b = 2a$$

このとき、Vが最大となります。