

Q.(標準問題精講 数 1A 例題 42)

解説の補助をお願いします。

A.

(a の値についての指定はありませんが、与えられた 2 次方程式の 2 つの解が整数であると指定されているので、条件がついている、2 次方程式の解を使って  $a^2 + 3$  の値を導こうと考えます。a を用いて 2 つの解を表す方法で一番簡単にできるのは、解と係数の関係を使うやり方であることに気付ければ、比較的簡単に解けます。)

与式の 2 つの整数解を  $\alpha$ 、 $\beta$  とおくと、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 3a$ 、 $\alpha\beta = 2a - 3$  となります。この 2 式から a を消去すると (値について全く指定のない a を消す。)、

$$\alpha\beta = \frac{2}{3}(\alpha + \beta) - 3 \text{ となります。これより、} \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\left(\beta - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} = -3$$

両辺に 9 をかけて、 $(3\alpha - 2)(3\beta - 2) = 4 - 27 = -23$  となります。(「ある文字が整数である」という条件を使うときは、かけ算にして考えることが多いです。)

左辺は 2 つの整数のかけ算であるので、23 は素数だから  $-23 = -1 \times 23 = -23 \times 1$  となり、 $\alpha \geq \beta$  とすると、 $3\alpha - 2 \geq 3\beta - 2$  なので、

$$3\alpha - 2 = 23, \quad 3\beta - 2 = -1 \quad \text{または} \quad 3\alpha - 2 = 1, \quad 3\beta - 2 = -23 \quad \text{となります。}$$

これらを解いて、 $\alpha$ 、 $\beta$  が整数になるのは后者であり、このとき  $(\alpha, \beta) = (1, -7)$  であり、このとき、 $\alpha + \beta = -6 = 3a$  なので、 $a = -2$

したがって、 $a^2 + 3 = 7$  となります。