数学Ⅲ 基礎問題精講 解説

P224｜基礎問122

・円柱を45°の平面で切る・・・？　そんなのイメージできなくてもいい

＜問題文の転載＞

底面が半径1の円で高さ1の円柱がある。この円柱を底面の円の直径ABを含み、底面と45°の角度をなす平面で切ると、大、小2つの立体に分かれる。このとき小さい方の立体の体積Vを求めよ。

この問題文を読んで、作られた立体を思い浮かべられる人は、ほとんどいないと考えてください。「みんなはどんな立体になるかイメージできているんだろうな」「それができない私は、きっと立体の体積を求める問題が不得意なんだろう」なんて思う必要はありません。

立体の体積を求める問題は、それが回転体であろうが、回転体でない立体だろうが、「立体をイメージすることを放棄すること」から始めます。これは逃げではなく、正しい戦略です。というのも、これからもっともっと複雑でイメージしにくい（図解できない）立体の体積を求める問題が出てきます。それを無理にイメージしようと考えるのではなく、もっと単純に考えるのです。

立体の体積を（積分を使って）求めるときには、明確な手順があります。それは、

①断面積を求める
②それを積分する

です。キモは、①断面積を求めるです。断面積さえ求まってしまえば、②それを積分することはとても簡単です（ただの計算問題ですからね）。ということで、断面積の求め方を解説していきましょう。

・彫刻型（立体を切ってできる立体の体積を求める型）における断面積の求め方（2ステップ）

今回の問題は「彫刻型」と命名しましょう。もともとある立体を切ったときの、体積を求めるものだからです。断面積の求め方は次の2ステップからなります。

①もとの立体の断面を知る（3つの方向から）
②平面tを使って断面積を表す

①もとの立体の断面を知る（3つの方向から）

まずは、これから切り刻んでいく立体の断面を知ります。今回の問題の場合は円柱がそれにあたります。円柱を3つの方向（x軸に沿って、y軸に沿って、z軸に沿って）見てみましょう。

すると、x軸、y軸に沿ったときは長方形、z軸に沿ったときは円になりますね。

なぜこんなことをするのでしょうか？
それは「求めるべき立体（3D）をイメージしようとするのはとても難しいが、断面（2D）で考えるのは簡単だから」です。3Dという高次元の立体を扱うのではなく、2Dという低次元の平面に落とし込んで考えることで、問題が一気に簡単になります（あとで積分して3Dに戻します）。

なので、最初から円柱を相手にするのではなく、平面図を相手にするのです。

さて、もとの立体は「x, y軸から見たら長方形、z軸から見たら円」ですが、これを底面と45°の角度をなす平面で切ります。x軸から見てみると、それは長方形を次のように切ったときの図形となります。

つまり、断面は直角二等辺三角形ですね。

一方、y軸から見てみると、長方形を（正面から斜め45°に）切った時にできる図形なので、結局は長方形ですね（この長方形を使って解いているのが「別解」に載っているものです）

最後に、z軸から見てみると、円を下から45°に切っているので半月のような形になります。

②変数tを使って断面積を表す
では、先ほどの3つの軸のどれに沿った場合で考えたらよいでしょうか？

一つ言えることは、z軸に沿ってできた断面積はオススメしないということです。なぜなら「基礎問90(2)」のように置換積分をしなければならないのが一般的な方法なので、時間がかかるし計算ミスもしやすいからです。そこで、x軸に沿って考えるか、y軸に沿って考えるのがよいでしょう。

x軸に沿って考えるときは、x=tのときの（平面x=tで切ったときの）断面積が出てきますし、
y軸に沿って考えるときは、y=tのときの（平面y=tで切ったときの）断面積が出てきます。

あとは、どちらかやりやすそうな方を選び、断面積をtを使って表し、tで積分したら終わりです。

＜本題＞
・図Ⅲの一辺が $\sqrt{1-t^2}$ になる理由

解答ではx軸に沿って求めた断面積を使っています。
x=tにおいて、三角形の各辺（底辺と高さ）がわかれば、面積を求めることができます。

$$x^2+y^2=1$$

まず、x=tのときに、底辺の長さはどうなるかというと、それは、x=tのときのにおけるy座標なので、

$$t^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - t^2 \quad \therefore y = \sqrt{1 - t^2}$$

続いて高さについてですが、そもそもこの三角形は直角二等辺三角形なので、底辺=高さです。

よって、高さも $\sqrt{1-t^2}$ です。

ゆえに、x=tにおける断面積は、

$$\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-t^2}{2}$$

となります。あとはこれをtで積分したら完了です。