

Q. (数 2B 標準問題精講 p171 標問 75)

何故 $0 < x < \pi, \pi < x < 2\pi$ の範囲で調べるのでしょうか。 $0 \leq x \leq 2\pi$ ではいけないのでしょうか。

A.

この問題は x の解がいくつあるかを調べる問題ですが、直接 x の個数が求められないので、まず $t = \cos x$ と変数変換を行い t についての二次方程式がいくつ解を持つかを調べていきます。

変数変換をする場合、例えば $s = 2x$ と置くときは一つの s に対して x は一つに決まるので解 s の個数と解 x の個数は一致します。しかし、本問では一つの t に対して二つの x を取ることができ、解 t の個数と解 x の個数が一致しません。ここで x の解がいくつあるかを調べるためには、各解が 1 つずつ存在するように x の範囲を区切る必要があります。

次に、なぜ $0 < x < \pi, \pi < x < 2\pi$ の二つの範囲に区切るかについて説明します。問題で与えられている x の定義域 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲内では、 $t = \cos x$ とおいた場合 1 つの t (ただし $-1 < t < 1$) に対して $0 < x < \pi$ の範囲で 1 つ (x_1)、 $\pi < x < 2\pi$ の範囲で 1 つ (x_2) の計 2 つの x が相当することになります。そのため、この二つの範囲に区切って調べています。

※ 172 ページの右端上から 2 つ目の図をご参照ください。