

Q. (基礎問題精講数学3 P116 例題 65(2))

詳しい解説をお願いします。

A.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ は y を x で 2 回微分するということです。つまり $\frac{dy}{dx}$ をもう一度 x で微分する、ということですから、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$(1) \text{より } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \text{ なので、 } \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{y} \right)$$

$\frac{x}{y}$ を x で微分しますが、 y も x の関数なので、分数関数の微分を行います。

分数関数の微分: $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

この問題では $f(x) = x, g(x) = y$ として微分を行うと、

$$f'(x) = 1, g'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} (\because (1)) \text{ となるので、}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1 \times y - x \times \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2} \quad \text{分子分母に } y \text{ をかけて}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{y^3} \quad x^2 - y^2 = 1 \text{ なので}$$

$$= -\frac{1}{y^3}$$

以上より、 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$ となります。