Q.(数 3 基礎問題精構 P73 演習 42)
r の場合分けの仕方が分かりません。

A.基本的にr^{n}の n→∞極限が含まれる場合には、P73 の「ポイント」にある通り r の値で場合分けを行いますが、今回は$(\mathrm{r}^2)^n$の n→∞極限が含まれるので場合分けの仕方が少し変わります。まずはとりあえず「ポイント」通りに場合分けをしてみましょう。
-1<r<1 のとき、$(\mathrm{r}^2)^n \to 0$に収束するので、

$$\mathrm{a_n} \to \frac{r \times 0 + 1}{0 + 1} = 1$$

r=1 のとき、

$$\mathrm{a_n} = \frac{1+1}{1+1} = 1 \text{ なので、 } \mathrm{a_n} \to 1$$

r>1 のとき、$\mathrm{a_n}$の分子分母を$(\mathrm{r}^2)^n$で割って

$$\mathrm{a_n} = \frac{r + \frac{1}{(r^2)^n}}{1 + \frac{1}{(r^2)^n}} \to r \qquad \left(\because \frac{1}{(r^2)^n} \to 0\right)$$

r≦-1 のとき、$\mathrm{a_n}$の分子分母を$(\mathrm{r}^2)^n$で割って

$$\mathrm{a_n} = \frac{r + \frac{1}{(r^2)^n}}{1 + \frac{1}{(r^2)^n}}$$

ここで、$\frac{1}{(r^2)^n}$の極限値が $\mathrm{r} = -1$ のときと $\mathrm{r} < -1$ のときで異なることに気付きます。($\mathrm{r} = -1$ のときは 1、$\mathrm{r} < -1$ のときは 0)
ここで初めて r=-1 のときと r<-1 のときでさらに場合分けが必要になることが分かります。
なお、r<-1 のときは r>1 のときと同じ結果となるので、解答ではあらかじめ一つにまとめられています。
以上のことから、r^nがらみの極限値を求める問題が出題されたときはまず「ポイント」通りに場合分けしてみて、必要が生じたときにさらに自分で場合分けをすればよいです。