

Q.(数3 標準問題精講 p223 演習 96-2)

(注) の解き方で、 $\arg z^3 = 120^\circ$ 、 240° から $\arg z = 40^\circ$ 、 80° は出せましたが、他の角度 (160° 、 200° 、 280° 、 320°) はどうやって求めればよいですか？

A.解答の

$$z^3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の後は、 z^3 の偏角が 0° 以上 1080° 未満となるので正確には

$$= \cos(120^\circ + 360k^\circ) + i\sin(120^\circ + 360k^\circ)$$

$$\text{または} \cos(240^\circ + 360k^\circ) + i\sin(240^\circ + 360k^\circ)$$

$$(k: \text{整数、ただし } 0^\circ \leq 120^\circ + 360k^\circ < 1080^\circ \text{かつ } 0^\circ \leq 240^\circ + 360k^\circ < 1080^\circ)$$

と書かなければいけません。これより

$$z = \cos\left(\frac{120^\circ + 360k^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{120^\circ + 360k^\circ}{3}\right)$$

$$\text{または} \cos\left(\frac{240^\circ + 360k^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{240^\circ + 360k^\circ}{3}\right)$$

$$= \cos(40^\circ + 120k^\circ) + i\sin(40^\circ + 120k^\circ)$$

$$\text{または} \cos(80^\circ + 120k^\circ) + i\sin(80^\circ + 120k^\circ)$$

となります。

ただし z の偏角の条件から $0^\circ \leq 40^\circ + 120k^\circ < 360^\circ$ かつ $0^\circ \leq 80^\circ + 120k^\circ < 360^\circ$

なので、 $k=0,1,2$ です。以上より解答にある 6 つの解が得られます。