

Q. (標準問題精講 2B 例題 71)

$f(x+p) = f(x)$  の意味と、 $\sin p = 0, \cos \sqrt{2}p = 1$  の導き方がよくわかりません。

A.

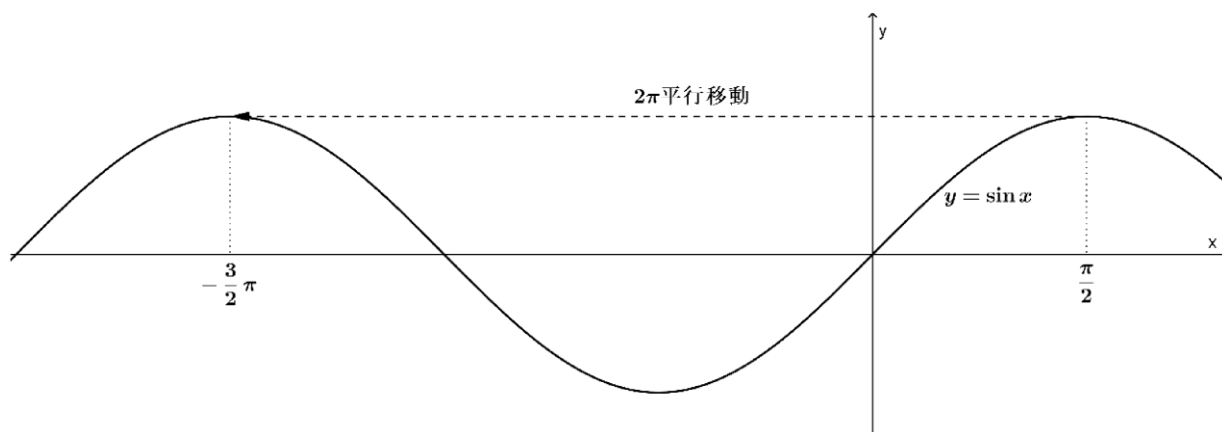
$f(x+p) = f(x)$  の意味と  $\sin p = 0, \cos \sqrt{2}p = 1$  の導き方について解説します。

2次関数  $y = x^2$  について、 $x \rightarrow x-2$  に変えると、 $y = (x-2)^2$  となりますが、このグラフは  $y = x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に 2 平行移動したグラフになっています。

同様に、任意の関数  $y = f(x)$  に関して、 $x \rightarrow x-a$  に変えたグラフ  $y = f(x-a)$  は、グラフ  $y = f(x)$  を  $x$  軸方向に  $a$  平行移動したグラフになります。(正確には数 III で習う内容になりますが、2次関数分野で習う人も多いように思います。)

次に、 $y = \sin x$  のグラフについて考えます。このグラフを  $x$  軸方向に  $-2\pi$  平行移動したグラフは、 $x \rightarrow x+2\pi$  より、 $y = \sin(x+2\pi)$  となります。

ここで、 $\sin x$  の周期は  $2\pi$  ですので、 $x$  軸方向に  $-2\pi$  平行移動したグラフは下図のように、もとのグラフと同じものになります。



よって、 $\sin(x+2\pi) = \sin x$  が成立します。

同様に、周期が  $p$  であるようなグラフ  $y = f(x)$  は、これを  $x$  軸方向に  $-p$  平行移動したグラフ  $y = f(x+p)$  と同じものになるはずですので、 $f(x+p) = f(x)$  が成立します。

次に、 $f(x+p) = f(x)$  を使って  $\sin p = 0, \cos \sqrt{2}p = 1$  を導きます。

$$f(x+p) = f(x) \dots \dots \textcircled{1}$$

①に  $x = 0$  を代入すると、

$$f(p) = f(0)$$

ここで、 $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}x$  であるから、

$$\sin p + \cos \sqrt{2}p = \sin 0 + \cos \sqrt{2} \cdot 0$$

$$\therefore \sin p + \cos \sqrt{2}p = 1 \dots \dots \textcircled{2}$$

また、同様に①に  $x = -p$  を代入すると、

$$f(0) = f(-p)$$

$$\sin 0 + \cos \sqrt{2} \cdot 0 = \sin(-p) + \cos \sqrt{2} \cdot (-p)$$

$$\therefore -\sin p + \cos \sqrt{2}p = 1 \dots \dots \textcircled{3}$$

さらに、② - ③より

$$2 \sin p = 0$$

$$\therefore \sin p = 0$$

また、② + ③より

$$2 \cos \sqrt{2}p = 2$$

$$\therefore \cos \sqrt{2}p = 1$$

となり、 $\sin p = 0$  及び  $\cos \sqrt{2}p = 1$  を導くことができます。