

Q. (標準問題精講 2B 演習 30(2))

解を 2 乗して因数定理で式を分解しましたが、なぜ 2 乗しても因数定理が利用できるのでしょうか。

A.

まず気づいてほしい点は、 x が $1+i$ を解として持つ際は常に、共役な解 $1-i$ も解に持つということです。これは解の公式を考えれば理解できると思います。

(共役な解を持つのは虚数だけでなく無理数でもそうです。たとえば、 $1+\sqrt{3}$ を解に持つときには常に $1-\sqrt{3}$ も解に持ちます。)

以上のことから、 $1+i$ を解に持つといわれている時点で $1-i$ も解にもつことがわかるため、それらに関して因数定理を用いることができます。 $(x-1-i)(x-1+i)$ という因数をもつことになり、これを展開すると x^2-2x+2 となります。なので、この式で割って考えているわけです。ただ、この式は $x=1+i$ という式を二乗して、 i が消えるようにしても求まります。その理由としては、先ほども書いたように、 x が $1+i$ を解として持つ際は常に、共役な解 $1-i$ も解に持つためです。 $1-i$ も解として持つという情報を $x=1+i$ がすでに持っていると考えましょう。