

Q. (基礎問題精講 2B P68 例題 42(1))

解答で、なぜ最後の式にたどり着くのが分かりません。

A.

精講にも記載の通り、2円が異なる2点で交わるための条件は

半径の差 < 中心間の距離 < 半径の和 ……③

となります。この条件は教科書でも公式として扱われているので問題ないかと思います。

与えられた円の方程式から半径と中心間の距離を求めると

①の半径 : $\sqrt{5}$

②の半径 : $\sqrt{2}$

中心間の距離 : $\sqrt{8}(=2\sqrt{2})$

となるので、③より

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < \sqrt{8} < \sqrt{5} + \sqrt{2} \dots\dots(*)$$

となることを示せば良いということになります。

ここで、

$$2 < \sqrt{5} < 3 \dots\dots④$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \dots\dots⑤$$

$$2 < \sqrt{8} < 3 \dots\dots⑥$$

ですので、④+⑤ を考えると

$$3 < \sqrt{5} + \sqrt{2} < 5 \dots\dots⑦$$

となります。よって⑥⑦より

$$\sqrt{8} < 3 < \sqrt{5} + \sqrt{2} \dots\dots⑧$$

が成立します。

また、⑤に-1をかけると

$$-2 < -\sqrt{2} < -1 \dots\dots⑨$$

④+⑨ より

$$0 < \sqrt{5} - \sqrt{2} < 2 \dots\dots⑩$$

となります。よって⑥⑩より

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < 2 < \sqrt{8} \dots\dots⑪$$

⑧と⑪から、(*)が導かれるので、題意は示されたと考えることができます。

(*)は等式を変形して得られる式ではなく、証明すべき式となります。上記の通り、 $\sqrt{\quad}$ の数の大小関係などを使って無理やり(*)を示すというのが本設問の大まかな流れとなります。